解難之趣

新界西小學數學比賽專題特刊

第二十五屆　　2015 年 3 月 21 日

在數學競賽，有一些用途廣泛的數學原理和定理，由於它們的陳述很簡單，所以很少以獨立的專題來討論；今次，我們選了幾個原理跟同學分享。

加法原理

做一件事，完成它可以有 n 類辦法，在第一類辦法中有 m_1 種不同的方法，在第二類辦法中有 m_2 種不同的方法，……，在第 n 類辦法中有 m_n 種不同的方法，那麼完成這件事的不同方法的數目為 $N = m_1 + m_2 + ... + m_n$。

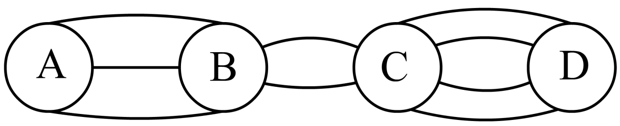
例 1：從甲地到乙地，可以乘火車、公共汽車、輪船前往。如果每天分別火車有 5 班，汽車有 4 班，輪船有 3 班，那麼，每天從甲地到乙地共有多少種不同的走法？

解答：無論選甚麼交通工具，都是同一類的東西；也就是說，你可以選擇乘火車、汽車或輪船，但是選了任何一類後，就不能再選其他的了，所以，按加法原理，不同的走法共有 $5+4+3=12$ 種。

乘法原理

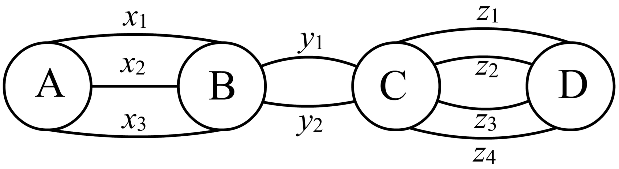
乘法原理：做一件事，完成它需要分成 n 個步驟，做第一步有 m_1 種不同的方法，做第二步有 m_2 種不同的方法，……，做第 n 步有 m_n 種不同的方法，那麼完成這件事的不同方法的數目為 $N = m_1 \times m_2 \times ... \times m_n$。

例 2：從 A 地到 D 地，途中要經過 B、C 兩地。從 A 地到 B 地有 3 條路，從 B 地到 C 地有 2 條路，從 C 地到 D 地有 4 條路，那麼從 A 地到 D 地有多少種不同的走法？



解答：從 A 地到 B 地有 3 種走法，到達 B 地後，對應著每一種走法，又有 2 種不同的走法可以到達 C 地。最後，從 C 地又會有 4 種不同的走法可以到達 D 地，所以從 A 地去 D 地，共有 $3\times2\times4=24$ 不同的走法。

為要更清楚地闡明上例，我們不妨令從 A 地到 B 地的 3 條路為 x_1、x_2、x_3，從 B 地到 C 地的 2 條路為 y_1、y_2，從 C 地到 D 地的 4 條路為 z_1、z_2、z_3、z_4，如下圖



然後，以表列方式表示出可能的走法：

<table>
<tr><td rowspan="4">x_1</td><td>y_1z_1</td><td>y_2z_1</td></tr>
<tr><td>y_1z_2</td><td>y_2z_2</td></tr>
<tr><td>y_1z_3</td><td>y_2z_3</td></tr>
<tr><td>y_1z_4</td><td>y_2z_4</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="4">x_2</td><td>y_1z_1</td><td>y_2z_1</td></tr>
<tr><td>y_1z_2</td><td>y_2z_2</td></tr>
<tr><td>y_1z_3</td><td>y_2z_3</td></tr>
<tr><td>y_1z_4</td><td>y_2z_4</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="4">x_3</td><td>y_1z_1</td><td>y_2z_1</td></tr>
<tr><td>y_1z_2</td><td>y_2z_2</td></tr>
<tr><td>y_1z_3</td><td>y_2z_3</td></tr>
<tr><td>y_1z_4</td><td>y_2z_4</td></tr>
</table>

明顯地，共有$3\times8=24$種不同的走法。

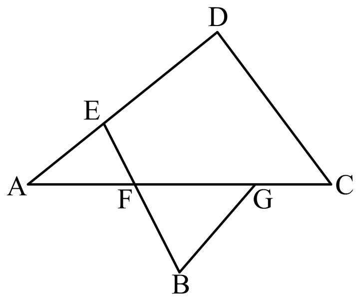
這裏要注意區分加法原理和乘法原理，要做一件事，完成它若是有 n 類方法，是分類問題，第一類中的方法都是獨立的，因此用加法原理；做一件事，需要分 n 個步驟，步驟與步驟之間是連續的，只有將分成的若干個互相聯繫的步驟，依次相繼完成，這件事才算完成，因此用乘法原理。

這樣完成一件事的分“類”和“步”是有本質區別的，因此也將兩個原理區分開來。

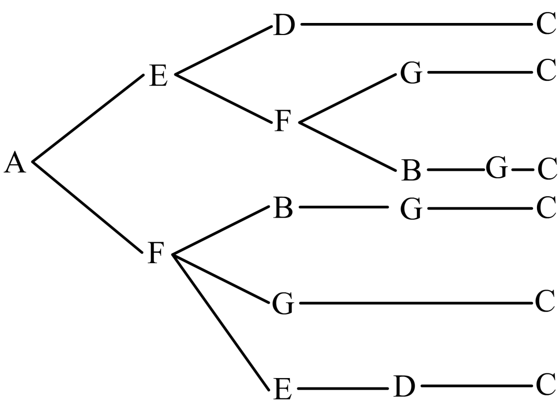
從上述兩例可知，加法原理和法原理常應用於「數路線」(另一種常見的比賽題目是「地圖染色」的問題）的問題上，讓我們看看下列例題，深入了解這兩個原理的使用方法。

例 3：如右圖，由 A 點到 C 點有多少條不同的路線？（每條路線不可經過同一點 2 次或以上）

（第 5 屆屯門區小學數學比賽個人賽第 19 題）



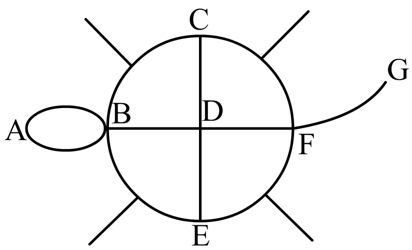
解答：由於點數不多，路線很少，以樹形圖列出可行的不同路線，共 6 條：



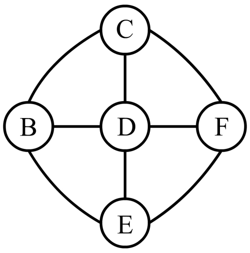
這裡，我們利用加法原理將可能的路線進行歸類，在路線不多的情況下，樹形圖能夠將所有可能的路線清楚呈現。

例 4：如右圖，由 A 點到 G 點有多少條不同的路線？（每條路線不可經過同一點 2 次或以上。）

（第 6 屆屯門區小學數學比賽個人賽第 23 題）



解答：明顯地，從 A 點到 B 點有 2 種不同的走法，現在，考慮中間的圖形，將圖形簡化如下：



從 B 點到 F 點，途經 1 點的走法有 3 個可能：BCF、BDF、BEF。

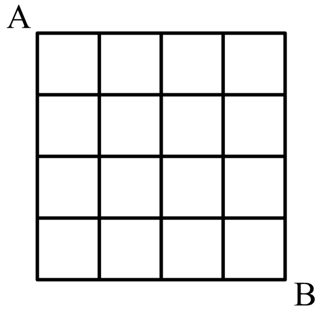
途經 2 點的走法有 4 個可能：BCDF、BEDF、BDCF、BDEF。

途經 3 點的走法有 2 個可能：BCDEF、BEDCF。

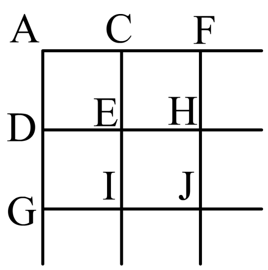
所以，從 B 點到 F 點，共有$3+4+2=9$條不同路線。

從 F 點到 G 點只有一條路可走，所以從 A 點走到 G 點，共有$2\times9=18$條不同的路線。

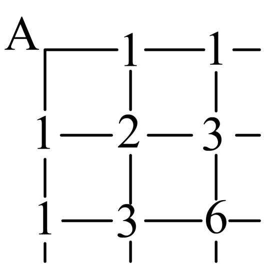
例 5：右圖是某城市的街道圖，若從 A 地到 B 地，規定只能由上到下或由左到右走，共有多少種不同的走法？



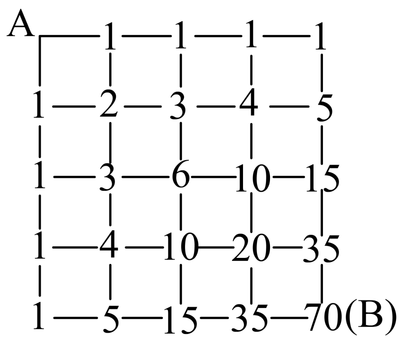
解答：這是一題典型利用加法原理去數路線的題目。先考慮簡單的情況，由於規定「只能由上到下或由左到右走」，如下圖一，從 A 點到 C、D 點只有 1 種走法，而按加法原理，走到 E 點就有 2 種走法。同理，到達 F、G 點只有 1 種走法，H、I 點有 3 種走法，而到達 J 點就有 6 種走法（下圖二）。



圖一



圖二



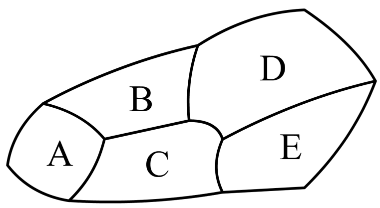
圖三

如此類推，得圖三，走到 B 點共有 70 種不同的走法。

除了數路線問題外，地圖染色問題亦常用到加法原理和乘法原理，讓我們看看下列。

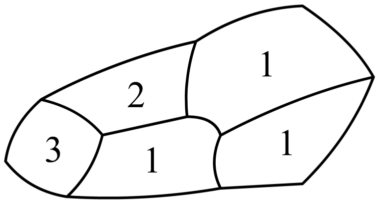
例 6：右圖中，A、B、C、D、E五個區域，以紅、黃、藍三色去塗，相鄰區域塗上不同顏色，共有多少種塗法？

（第 13 屆屯門區小學數學比賽個人賽第 19 題）



解答：首先，可以紅、黃、藍任一顏色去塗A區。由於B、C區與A相連，而B、C兩區亦相連接，所以可塗在B區的顏色減到2種，塗在C區的減到1種。

雖然E區並不與B區相連，理論上可選的顏色有2種，但這樣做的話，D區將無法著色，所以，可塗上的顏色數目如右圖，按乘法原理，共有 $3\times2\times1\times1\times1=6$ 種不同的塗色方法。



看過比賽的例子後，讓我們想一想在日常生活會遇到的問題。例如，在一次舊同學的聚會中，有 11 個人與會，若果他們每人都跟其他人握手一次，那麼，他們共握手多少次呢？

要舉辦一次 15 人參加的象棋比賽，以單循環賽制進行，一共要比賽多少場呢？

如果，同學是足球愛好者，你有想過英格蘭超級足球聯賽每一個球季共比賽多少場呢？

首先，我們先要知道英格蘭超級足球聯賽共有 20 支球隊參予，以雙循環賽制，每支球隊都會主場迎戰其他球隊一次，亦要作客出戰其他球隊一次。那麼每支球隊都要作賽 $(20-1)\times2=38$ 場，故此，整季就要比賽 $20\times38=380$ 場。

單循環賽制就是每兩個參加者只比賽一場，那麼，15 人參加的象棋比賽，每人就要比賽 $15-1=14$ 場，但「我跟你比賽」與「你跟我比賽」是相同事，所以 15 人參加的比賽共要比賽 $\dfrac{15\times(15-1)}{2}=105$ 場。

其實，每個人都跟其他人「握手一次」，與「比賽一場」是一樣的，所以 11 人的聚會中，他們共握手 $\dfrac{11\times10}{2}=55$ 次。不過，我們可以這樣想：將 11 人編號為 1-11，第 1 號與其他 10 人握手後就離開了，這樣他共握了 10 次手。然後，在這 10 人中，第 2 號重複第 1 號的動作，他就會握手 9 次了。如推類推，直到最後剩下 2 人握手 1 次。這樣，他們共握手
$10+9+8+7+6+5+4+3+2+1=\dfrac{10\times(10+1)}{2}=55$ 次。

鴿巢原理

鴿巢原理(Pigeonhole principle)，又名抽屜原理(box (drawer) principle)。最先由德國數學家狄利克雷(Dirichlet)於 1834 年在其著作《*Schubfachprinzip* ("drawer principle" or "shelf principle")》中提出。其中一種簡單的表述法為：

（摘自維基共享資源）

(I) 「若有 n 個籠子和 $n+1$ 隻鴿子，所有的鴿子都被關在鴿籠裡，那麼至少有一個籠子有至少 2 隻鴿子。」

或者這麼說：

(II) 「若有 n 個籠子和 $kn+1$ 隻鴿子，所有的鴿子都被關在鴿籠裡，那麼至少有一個籠子有至少 $k+1$ 隻鴿子。」

雖然鴿巢原理看起來很容易理解，但有時使用鴿巢原理會得到一些很有趣的結論：

例如：香港最少有兩個人頭髮數一樣多。

因為，常人的頭髮數目在 15 萬左右，可以假定沒有人有超過 100 萬根頭髮，但香港人口大於 100 萬。如果我們讓每一個鴿巢對應一個頭髮數字，鴿子對應於人，那就變成了有大於

100 萬隻鴿子要進到至多 100 萬個巢中。所以，結論很明顯。

另一個例子：盒子裡有 10 隻黑襪子、12 隻藍襪子，你需要拿一對同色的出來。假設你總共只能拿一次，而且拿的時候還看不到，那你至少應該拿幾隻出來，才能保證有一雙同色的呢？可能有人會脫口而出「13 隻！」其實 3 隻就可以了，因為顏色只有兩種（鴿巢只有兩個），而三隻襪子（三隻鴿子），結論就明顯了。

更不直觀的例子：有 n 個人（至少 2 人）互相握手（隨意找人握），必有兩人握手次數相同。

這裡，鴿巢對應於握手次數，鴿子對應於人，每個人都可以握 0、1、2、...、$n-1$ 次手──但 0 和 $n-1$ 不能同時存在，因為如果一個人不和任何人握手，那就不會存在一個和所有其他人都握過手的人──所以鴿巢是 $n-1$ 個，但有 n 個人（n 隻鴿子），按原理必有一個鴿巢最少有 2 隻鴿子。

好了，讓我們也從過去的比賽題目中，好好學習一下鴿巢原理的應用。

例 8：一個袋裡有紅珠6粒，黃珠8粒，藍珠10粒。最少要抽出多少粒珠才可保證有3粒是同一顏色？（第6屆屯門區小學數學比賽個人賽第24題）

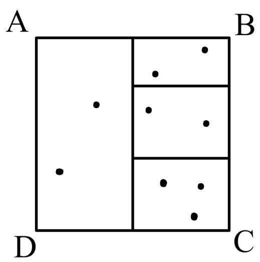
解答：這個簡單的題目。想像一下最差的情況，先抽到紅珠、黃珠、藍珠各 2 位，到抽出第 7 粒珠的時候，不論是紅、黃、藍任何一種顏色，都會馬上符合 3 粒同色的要求，所以最少要抽出 7 粒才可保證有 3 粒珠同一顏色。

其實，按鴿巢原理的第二個版本，假定 3 種顏色是鴿巢，那麼抽出的珠數為 $3\times2+1=7$ 時，就會保證有 $2+1=3$ 粒珠在同一鴿巢；即是同顏色。

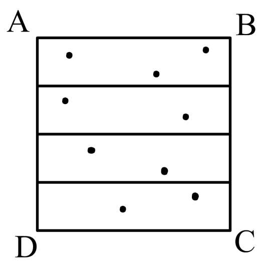
鴿巢原理的應用看似簡單，不過，它應用到證明上卻非常利害！

例 9：在邊長為 4 的正方形內，隨意放進 9 個點，試證明其中必有 3 點，它們構成的三角形的面積不大於 2。

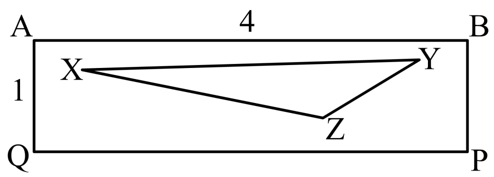
解答：因為 $9=2\times4+1$，所以由鴿巢原理解(II)，設有 4 個鴿巢，則可保證至少有一個鴿巢的點數不少於 3 個。我們將正方形分為 4 等份──這是最有可能得到面積大於 2 的做法，若果分得不平均的話，很容易就會得到面積少於 2 的三角形（如圖一）──令其中一份包含 3 個點（如圖二和圖三）：



圖一



圖二

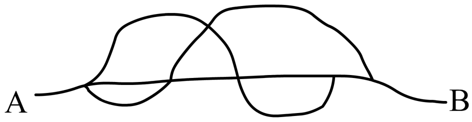


圖三

明顯地，ΔXYZ 的面積必定少於長方形 ABCPQ 內最大的三角形面積！而這個三角形的面積 ΔABP 的面積，即 $\frac{1}{2}(4)(1)=2$。得證。

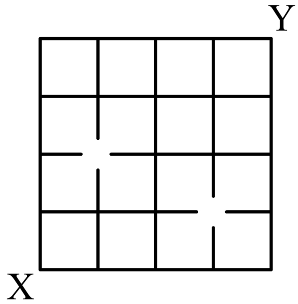
習題

1. 從 A 地到 B 地有道路如下圖所示。只能向前，從 A 地到 B 地有多少條不同路線？
（第 13 屆屯門區小學數比賽個人賽第 15 題）

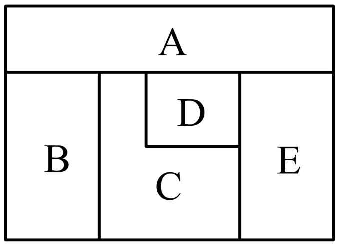


2. 如果一個四位數與三位數的和是 1999，並且四位數和三位數是由 7 個不同數位組成的，那麼這樣的四位數最多有多少個？

3. 如右圖，由 X 點，經相連的黑線，向上或向右行，到達 Y 點，共有多少條不同的路線？
（第 11 屆屯門區小學數比賽個人賽第 25 題）

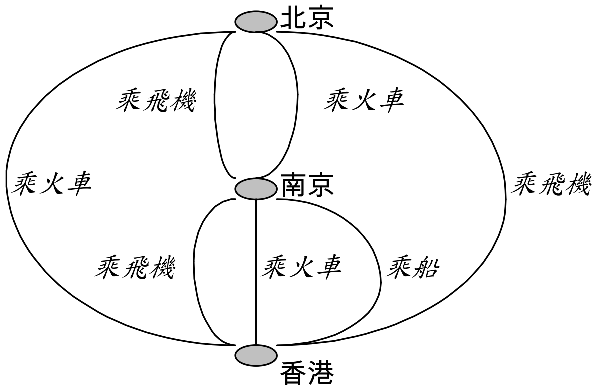


4. 如右圖所示，A、B、C、D、E 五個區域分別用紅、藍、黃、白、綠五種顏色中的某一種著色．如果使相鄰的區域著不同的顏色，問有多少種不同的著色方式？



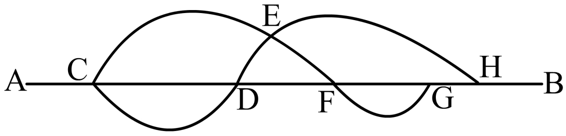
5. 用 1 元、2 元、5 元的硬币凑成 100 元，共有多少种不同的凑法？

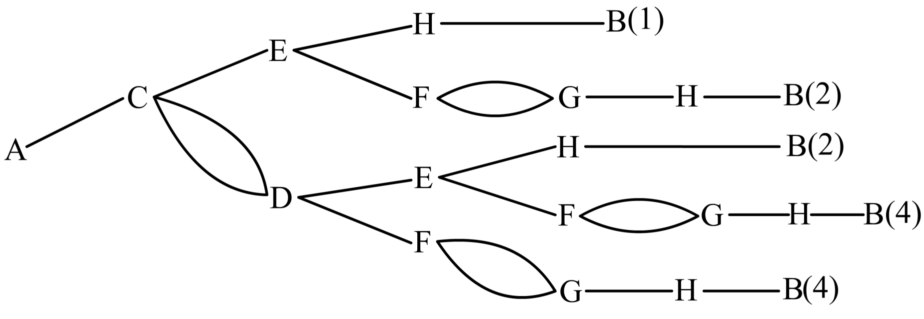
6. 下圖列出香港、南京和北京之間的交通方法，現在由南京出發，再回南京，途中須經過香港但不可經過南京，又不准走重複的路線，問共有多少種不同的去法？（第十屆屯門區小學數比賽個人賽第25題）



答案

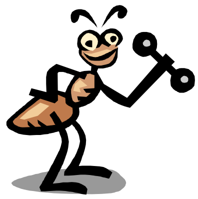
1. 將路線圖稍作整理，得右圖：
雖然點數不少，但可走的路線也不是很多，我們利用樹形圖（下圖）去數路線：





圖中括號的數字顯示從 A 點走到 B 點的可能走法，所以共有$1+2+2+4+4=13$條路線。

2. 依題意得出下列算式：



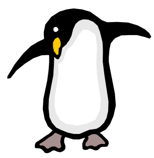
$$\begin{array}{r} 1\ A\ B\ C \\ +\quad D\ E\ F \\ \hline 1\ 9\ 9\ 9 \end{array}$$

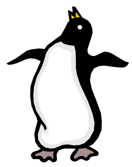
由於 1 已定，相應的 8 也就不能用（因為 $1+8=9$）。明顯地，這算式沒有進位。這樣，對於 D 來說，有 2、3、4、5、6、7、9 共 7 種選擇（D 不能取 0，否則不是三位數），每一種選擇都有相應的 D。對於 E 來說，在剩下的數中有 6 種選擇，每一種選擇都有相應的 B；如果 D 選了 2，那麼，A 必定是 7，這時，E 只有 6 個可能。最後，對於 F 來說，在剩下的數中有 4 種選擇，每一種選擇都有相應的 C。最後，根據乘法原理，共有 $7\times6\times4=168$ 種。

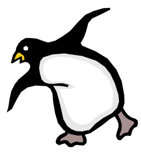
3. 這是一題稍加改變的數路線問題。由於有些路口不通，依例 5 得下圖：

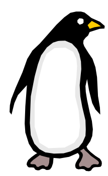
```
 1—2—6—13—24 (Y)
 |  |  |  |  |
 1—1—4—7—11
 |  |  |  |  |
 1—0—3—3—4
 |  |  |  |  |
 1—2—3—0—1
 |  |  |  |  |
X1—1—1—1—1
```

所以，共有 24 條不同路線。









4. 對這五個區域，我們分五步依次給予著色：
   I. 區域 A 共有 5 種著色方式；
   II. 區域 B 因不能與區域 A 同色，故共有 4 種著色方式；
   III. 區域 C 因不能與區域 A，B 同色，故共有 3 種著色方式；
   IV. 區域 D 因不能與區域 A，C 同色，故共有 3 種著色方式；
   V. 區域 E 因不能與區域 A，C，D 同色，故共有 2 種著色方式。

   於是，根據乘法原理共有 $5\times4\times3\times3\times2=360$ 種不同的著色方法。

5. 處理這樣的問題，我們應該先分類再應用加法原理：
   I. 只用一種硬幣去組合 100 元有 3 種方法，即用 100 個 1 元或 50 個 2 元或 20 個 5 元；
   II. 1 元和 2 元的組合：其中 2 元的個數可以從 1 枚到 49 枚均可，有 49 種方法；
   III. 1 元和 5 元的組合：其中 5 元的從 1 枚到 19 枚均可，有 19 種方法；
   IV. 2 元和 5 元的組合：其中 5 元的有 2、4、6、……、18 共 9 種方法；
   V. 1、2、5 元的組合：因爲 $5=1+2\times2$，若果用 19 個 5 元組成 95 元，那麼最後 5 元的組合可以是 $1+2\times2=1\times3+2=5$，故此有 2 個可能。$10=2\times5=1\times2+2\times4$，以 18 個 5 元組成 90 元，最後的 10 元可以是 $1\times2+2\times4=1\times4+2\times3=1\times6+2\times2$

$=1\times8+2\times1=10$，有 4 個可能。$15=1+2\times7$，以 17 個 5 元組成 85 元，這樣最後的 15 元可以是 $1+2\times7=1\times3+2\times6=1\times5+2\times5=...=1\times13+2\times1=15$，共有 7 種可能；我們會發現，除去 $n\times5$ 元以外，組成餘額 $(100-5n)$ 的可能組合恰好等於可以使用最多 2 元的個數！由於 $95=1+2\times47$，故此，以 1 個 5 元，餘下的 95 元用 1 元和 2 元組成的方法共有 47 個，所以用 1、2、5 元組成 100 元的方法共有 $2+4+7+9+12+14+17+19+22+24+27+29+32+34+37+39+42+44+47=461$ 種，

分類再相加：共有 $3+49+19+9+461=541$ 種方法。

6. 從這 6 個數中取出 2 個數寫成分數時，選分子或分母時會有 6 種選法，然後，決定了分子或分母後，再選 1 數，會有 5 種選法，根據乘法原理，這樣的分數有 $6\times5=30$ 個。根據握手的例子，在這樣的分數中，真分數和假分數各佔一半，有 $\frac{6\times5}{2}=15$ 個。在真分數中，$\frac{2}{4}$ 和 $\frac{3}{9}$ 都不是最簡分數，所以最簡分數應有 $15-2=13$。

7. 這是一條很有趣而且充滿「陷阱」的題目，除了要使用加法原理和和乘法原理外，還要很小心地處理2個給予的條件；一，不可經過南京；二，不准走重複的路線。這樣，有以下5個可能的路線：

I. 南京ー香港ー南京

從南京到香港有3種不同的走法，回程不准重複路線（也就是說，若果乘飛機從南京到香港，回程就不能乘飛機了；因此，可選擇的回程方法必須減少1種），只有2種走法，所以有 $3\times2=6$ 種走法。

II. 南京ー北京ー香港ー南京

從南京到北京有2種不同的走法，再到香港有2種不同的走法，最後返回南京有3種法，所以共有 $2\times2\times3=12$ 種不同的走法。

III. 南京ー香港ー北京ー南京

這個情況與上相同，故有 $3\times2\times2=12$ 種不同的走法。

好了，上述3種是正常的情況。由於不走回頭路這條件容許了以下2種「不正常」的走法：

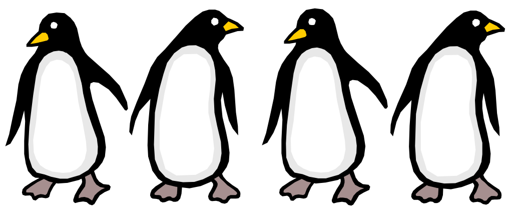
IV. 南京ー北京ー香港ー北京ー香港ー南京

從南京到北京有2種走法，北京到香港也有2種走法，但再回北京，由於先前已選了火車或飛機，回程時不能選擇相同的走法，所以只得1種走法；同理，再由北京回南京也只有1種走法。所以共有 $2\times2\times1\times1=4$ 種不同的走法。

V. 南京ー香港ー北京ー香港ー北京ー南京

與上述相同的想法，共有 $3\times2\times(2-1)\times(3-2)=12$ 種不同的走法。

最後，共有 $6+12+12+4+12=46$ 種不同的走法。



顧問老師：梁志明、謝慧、黃萬安、黃偉智、楊振雄、袁仲強