

解難之趣



新界西小學數學比賽專題特刊

2012年3月17日

最大公因數和最小公倍數

在數學競賽中，經常會問到有關最大公因數(H.C.F.)和最小公倍數(L.C.M.)的問題。因為學習數學必然會接觸不同的數(numbers)，這類問題能夠反映學生對數的了解有多深刻。

兩個或以上的整數共有的因子(factor)中，最大的一個稱為最大公因數(Highest Common Factor)；而兩個或以上的整數共有的倍數中，最小的一個稱為最小公倍數(Least Common Multiple)。例如：

12的因子：1、2、3、4、6、12

18的因子：1、2、3、6、9、18

兩數共有的因子為1、2、3、6，但最大公因數是6。

4的倍數：4、8、12、16、20、24、...

6的倍數：6、12、18、24、30、36、...

12和24是首兩個共有的倍數，但最小公倍數是12。

根據上述的定義，若兩個或以上的整數的最大公因數為1，那麼這些整數稱為互質(relatively prime)。

其實，12可表示為 $2 \times 2 \times 3$ ，而18可表示為 $2 \times 3 \times 3$ ，這表示法稱為質因數連乘積(Product of Prime Factors)。這個表示法的最大好處，就是任何整數表示成質因數乘積後，數式都是唯一(unique)的。從兩個數式，不難發現 $2 \times 3 = 6$ 是最多的共有因子，也就是最大公因數。依這樣的思路， $2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$ 就是12和18的最小公倍數。那麼怎樣將兩個或以上的整數轉成質因數連乘積呢？

例如，一片長48厘米，寬42厘米的金屬片，在不浪費材料的情況下，能剪裁出多少片面積相等的最大正方形金屬片？要解決這問題，就要知道48和42到底具有那些性質。明顯地，48和42都可以被2整除，所以，裁一個邊長2厘米的正方形當然沒問題。但還可以再大一點嗎？在數值較小時，我們可以逐一去試。不過，當數值較大，或者要試的數較多時，我們需要更有效率的方法——短除法。

2	48	42
3	24	21
	8	7

以最小的質數去整除48和42，先2由始，直至那些數不能被2整除，就試下一個質數，如些類推，直至所有餘數均互質為止。這時，能夠整除48和42的質因子的乘積就是最大公因數，即 $2 \times 3 = 6$ ，而因子連商數的乘積就是48和42的最小公倍數，即 $2 \times 3 \times 7 \times 8 = 336$ 。

回到上述應用題，我們知道，金屬片可剪裁出的小正方形的最大邊長為6厘米；共可剪出56個這樣的正方形。



計算三個或以上的數的H.C.F.和L.C.M.，方法與上相同。例如求18、24、32的H.C.F.和L.C.M.，以短除法得下式：

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 18 & 24 & 32 \\ \hline & 9 & 12 & 16 \end{array}$$

不過，9、12、16三數再無公因子，明顯，H.C.F.是2，但L.C.M.是 $2 \times 9 \times 12 \times 16 = 3456$ 嗎？當然不是！計算L.C.M.的工作還沒有完成。只要所得的商數中任意兩數仍有公因子的話，計算仍要繼續，直至所得商數互質為止。我們發現，9和12仍有公因子，12和16也有公因子，於是得下式：

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 18 & 24 & 32 \\ \hline 2 & 9 & 12 & 16 \\ \hline 2 & 9 & 6 & 8 \\ \hline 3 & 9 & 3 & 4 \\ \hline 3 & 3 & 1 & 4 \end{array} \quad \leftarrow \text{三數再無公因子}$$



所以18、24、32的L.C.M.應為 $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 1 \times 4 = 288$ 。

將上述題目轉為應用題：小長方體的長、闊、高分別是32厘米、24厘米、18厘米。用這些小長方體去堆一個正立方體，最少要用多少塊小長方體；這個正立方體的邊長最小是幾厘米？明顯，正方體的邊長最小是288厘米。因為 $288 \div 32 = 9$ ， $288 \div 24 = 12$ ， $288 \div 18 = 16$ ，所以小長方體的數目是 $9 \times 12 \times 16 = 1728$ 塊。

在進入數學比賽的世界前，讓我們再學習一件事：上題的最小公倍數288是由一條長長的數式 $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 1 \times 4 = 288$ 得出，寫起來很不方便，於是，數學家在數字的右上方寫上一個較細的數字，用以表示連乘的次數，叫指數記數法(index notation)，例如

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$$

我們稱2為底(base)，4為指數(index)，表示底數2自乘的次數。這樣，上述長長的數式就可以表示得簡潔： $288 = 2^5 \times 3^2$ 。

任何合乘數都可以唯一地表示為質因數連乘積，這樣該數可被那些數整除的性質也就一清二楚了。不過，為了這「唯一性」的特質，1不再被當成質數。

簡介了最大公因數、最小公倍數、指數記數法和質因數連乘積後，讓我們看看在數學競賽裡的題目。

例一：已知兩數的積是5766，它們的最大公因數是31，求這兩個數。

解答：把這兩個數的乘積用質因數連乘積表示：

$$5766 = 2 \times 3 \times 31^2$$

已知兩個數的最大公因數是31，所以這兩數就是

$$31 \text{ 和 } 2 \times 3 \times 31 = 186 ;$$

$$\text{或 } 2 \times 31 = 62 \text{ 和 } 3 \times 31 = 93 .$$



例二：一個自然數除1186餘1、除1661餘2，除2209欠3，問這個自然數是多少？

解答：根據已知條件，這個自然數能整除

$$1186 - 1 = 1185$$

$$1661 - 2 = 1659$$

$$2209 + 3 = 2212$$

所以這個自然數就是1185，1659，2212的最大公因數。

$$1185 = 3 \times 5 \times 79$$

$$1659 = 3 \times 7 \times 79$$

$$2212 = 2 \times 2 \times 7 \times 79$$

所以自然數就是79。

例三：已知兩個自然數的和為165，它們的最大公因數為15，求這兩個數。

解答：首先將165表示成質因數連乘積，即

$$165 = 3 \times 5 \times 11$$

$$= 15 \times 11$$

因為兩數的最大公因數為15，不妨假設兩數為 $15x$ 及 $15y$ ，

其中 $x + y = 11$ 。

當 $x = 1$ ， $y = 10$ ，則兩數為15和150；

當 $x = 2$ ， $y = 9$ ，則兩數為30和135；

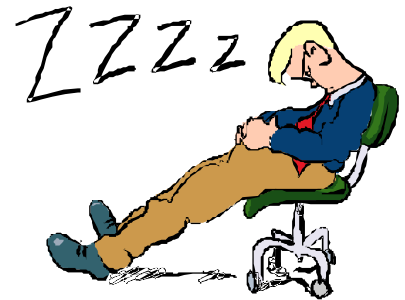
當 $x = 3$ ， $y = 8$ ，則兩數為45和120；

當 $x = 4$ ， $y = 7$ ，則兩數為60和105；

當 $x = 5$ ， $y = 6$ ，則兩數為75和90。

當 $x > 6$ ，兩數將重覆上述的情況。

故此，這兩數為上述五組答案。



例四：100個正整數的和是6666，它們的最大公因數最大可能是多少？

解答：由於題目對這100個正整數無甚限制，最直截的方法就是取100相同的數。

但 $6666 \div 100 = 66.66$ ，不是正整數。我們只好把6666因式分解，看看箇中隱藏著甚麼「玄機」？

$$\because 6666 = 100 \times 101$$

所以，取99個66，1個 $66 \times 2 = 132$ ，就可以得到100個正整數，使得它們的最大公因數最大是66。

看過上述例題後，讓我們看一看質因數連乘積的用處。很多同學都會覺得質因數連乘積比不上短除法，看過這條例題後，或者會對它「刮目相看」？

例五：將下面八個數平分成兩組，使兩組數各自的乘積相等。

$$14, 30, 33, 35, 39, 75, 143, 169$$

解答：若果胡亂去試，就算應用計算機，也花去同學不少時間；這個不是辦法。該如何是好

呢？不要忘記，把八個數平分成兩組，使每組數的乘積相等，那每組數中所含的質因數應該一樣。因此，將8個數表示為質因數連乘積，答案自會一目了然。

$$\begin{array}{r}
 14 = 2 \times \qquad \qquad \qquad 7 \\
 30 = 2 \times 3 \times 5 \\
 33 = \qquad 3 \times \qquad \qquad \qquad 11 \\
 35 = \qquad \qquad \qquad 5 \times 7 \\
 39 = \qquad 3 \times \qquad \qquad \qquad 13 \\
 75 = \qquad 3 \times 5^2 \\
 143 = \qquad \qquad \qquad 11 \times 13 \\
 169 = \qquad \qquad \qquad 13^2 \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow
 \end{array}$$



要令兩組的因數數目一樣，那「↑」所示的數，必須屬於不同的組別。明顯地{14}和{30, 35}一定要置於不同組別。由「11」這個因子可知，33和143必定分別在兩組裡，現有兩個可能情況：

	A組	B組
第一種情況	14, 33	30, 35, 143
第二種情況	14, 143	30, 35, 33

按第一種情況，因為B組裡143有「13」這個因子，所以39必須在B組，而169就一定要在A組了。第二種情況亦然。所以答案如下：

	A組	B組
第一種情況	14, 33, 75, 169	30, 35, 143, 39
第二種情況	14, 143, 39, 75	30, 35, 33, 169

完全明白

在討論有關最小公倍數的問題前，讓我們從中國古算史上有名的「孫子問題」開始，《孫子算經》有這樣一道題目：

「今有物不知其數，三、三數之剩二，五、五數之剩三，七、七數之剩二，問物幾何？」

用現在的話說：一個數除以3餘2，除以5餘3，除以7餘2，問這個數是多少？

這條題目有許多個解(solutions)，23是其中一個答案，若果將23加上105的倍數，我們可獲得無限多個答案。《孫子算經》記載了一個「神妙」的方法：

將除以3的餘數乘70，除以5的餘數乘21，除以7的餘數乘15，然後將3個數加起來，若果得數大於105，就將得數減105，餘下的就是答案了。按這個方法，我們要求出的那個數就是

$$2 \times 70 + 3 \times 21 + 2 \times 15 = 233$$

由於233大於105，我們將233減105得128；再減105，最後得到23這個答案。

當然，除了最小解答23外，還有128、233、338……等等。《孫子算經》的方法，可以用以下口訣總結：

「三人同行七十稀，（將除3餘數乘70）
五樹梅花廿一枝。（將除5餘數乘21）
七子團圓整半月，（將除7餘數乘15）
除百零五便得知。」（將3個數的和減105）

上述的方法雖然奇妙，但只適用於除數是3、5和7的情況，若除數是其他數字，這方法就行不通了。因此，我們需要另一種方法。

例六：有一個數除以5餘2，除以7餘3，除以11餘4，求這個數最小是多少？

解答：解這條題目，我們不妨先考慮滿足兩個條件的數，然後再進一步求滿足第三個條件的數。

首先，我們知道「除以7餘3，除以11餘4」的自然數是59，而且7和11的最小公倍數是77，因此，我們將59逐次加上77，看看那個數最先符合「除5餘2」的條件。顯然59不合條件。

$59 + 77 = 136$ 除以5餘1，不合條件。

$136 + 77 = 213$ 除以5餘3，不合條件。

$213 + 77 = 290$ 除以5餘0，不合條件。

$290 + 77 = 367$ 除以5餘2，符合條件。

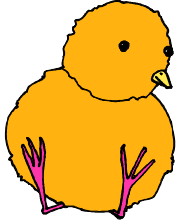
所以符合條件的最小數是367。



解答上述例題時，我們選擇先求符合「除7餘3，除11餘4」條件的數，這樣做可以令試驗符合第三個條件時的步驟減少。讓我們再看以下兩個例子：

例七：一箱雞蛋，二個二個數，三個三個數，四個四個數，五個五個數，六個六個數均多出一個，如果七個七個數，則剛好數盡，問這箱雞蛋最少有幾隻？

解答：我們將上例所用的方法推廣應用。首先符合除2、3、4、5、6均餘1的自然數是61，而且2、3、4、5、6的最小公倍數是60，因此我們將61逐次加上60，看看得數能否被7整除。顯然61不能被7整除。



$61 + 60 = 121$ 除以7餘2，不合條件。
 $121 + 60 = 181$ 除以7餘6，不合條件。
 $181 + 60 = 241$ 除以7餘3，不合條件。
 $241 + 60 = 301$ 除以7餘0，符合條件。
所以雞蛋的數目是301隻。

例八：恰好可被6、7、8、9整除的五位數有多少個？

解答：首先，我們知道6、7、8、9的最小公倍數是504，然後用504除以10000，找出第一個可被6、7、8、9整除的五位數。因為 $10000 \div 504 = 19 \dots\dots 424$ ，最後一個可被504整除的四位數是 $504 \times 19 = 9576$ ，所以

第一個可被504整除的五位數是10080。

另外，最大的五位數是99999，用504去除，得 $99999 \div 504 = 198 \dots\dots 207$

所以最後一個可被504整除的五位數是 $504 \times 198 = 99792$ 。

因為10080是504的第20個倍數，

99792是504的第198個倍數，

所以從10080至99792共有 $198 - 20 + 1 = 179$ 個五位數。

(本題解答由2C(94)班梁美紅同學提供)

例九：分數 $\frac{73}{136}$ 的分子與分母同時減去同一個數，所得的分數約分後是 $\frac{2}{9}$ 。求減去的數。

解答：設減去的數為 x ，則我們有 $\frac{73-x}{136-x} = \frac{2m}{9m}$ ，其中 m 為正整數。

把 $(73-x)$ 分為2等分， $(136-x)$ 分為9等分；由上式可知，那等分的量就是 m 。

$$(136-x) - (73-x) = 9m - 2m$$

$$7m = 63$$

$$m = 9。$$

$$\therefore 73-x = 2 \times 9 \quad \text{或} \quad 136-x = 9 \times 9$$

兩式均可得 $x = 55$ 。

另，以列方程的方法，亦可得：

$$9m(73-x) = 2m(136-x)$$

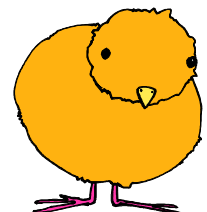
$$m[9(73-x) - 2(136-x)] = 0$$

$\therefore m$ 為一正整數，不可能為0，

$$\therefore 9(73-x) - 2(136-x) = 0$$

$$7x = 385$$

$$x = 55$$



例十：在周長400米環形跑道外圍上放花盆，甲、乙兩人從同一個起點放起。甲先放，每隔10米放一個花盆；甲放好後，乙去放，每隔8米放一個花盆。按規定甲放過花盆的地方，乙就不能再放。那麼跑道外圍上共放了多少個花盆？

解答：解這道題目，我們先要找出甲、乙獨自放花盆的數目，然後再減去他們共同都會放花盆的數目。10和8的最小公倍數為40，共同放花盆的地方，就是距離起點是40的倍數的地方。

$$\begin{aligned} \text{甲放花盆的數目} &= \frac{400}{10} \\ &= 40 \text{ (個)} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{乙放花盆的數目} &= \frac{400}{8} \\ &= 50 \text{ (個)} \end{aligned}$$

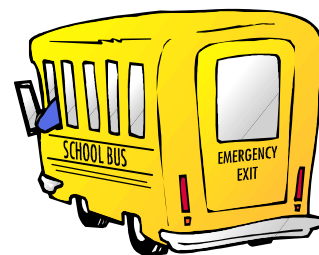
$$\begin{aligned} \text{甲放了花盆而乙不能放的地方} &= \frac{400}{40} \\ &= 10 \text{ (個)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{跑道外圍放著花盆的數目} &= 40 + 50 - 10 \\ &= 80 \text{ (個)} \end{aligned}$$



習題

1. 今有320個蘋果，240個梨，200條香蕉，假設每種食物都沒有剩餘，最多可平均分給多少個小孩？
2. 把52、57、65、69、95、28、9、161這八個數平分成兩組，使每組四個數的乘積相等。
3. 有十個數：21、22、34、39、44、45、65、76、133、153。試把它們編成兩組，每組五個數，使得兩組數的乘積相等。
4. 四個自然數的總和是1111，若這四個數的最大公因數大於1，試求出這四個數的最大公因數。
5. 有鉛筆433枝，膠擦260塊，平均分配給若干小學生。小學生30人以上，50人以下；分到最後，鉛筆餘13枝，膠擦餘8塊，問共有多少名小學生？
6. 有糖115顆，餅142塊，桔子72隻，平均分給一班小朋友。結果糖多出7顆，餅欠2塊，桔子剛可分盡，問這班小朋友最多有幾人？
7. 有一個自然數分別除360，314和245都得到相同的餘數，問這個自然數是多少？
8. 用長9cm，闊6cm和高7cm的長立方體木塊疊成一個大正立方體，最少要用多少塊？
9. 一堆筆，3人、4人、5人或6人均分皆餘2枝，7人分則可分盡，問最少有筆多少枝？
10. 一箱桃子，5個一堆餘2個，7個一堆餘3個，9個一堆餘4個，問這箱桃子最少有幾個？
11. 一堆蘋果約有五千多個，無論10個一袋、9個一袋、8個一袋、7個一袋、6個一袋、5個一袋、4個一袋、3個一袋、2個一袋，總是少了1個，求這堆蘋果的數目。
12. 一個自然數，被5、6、7除所得的餘數均為1，在10000以內，這樣的數共有多少個？
13. 有一箱蘋果，平均分給幼兒園大、小兩個班，每人可分得6個；如果只分給大班，每人可得10個。如果只分給小班，則每人最少可得到幾個？
14. 甲、乙兩班客車在同一公路上，往返兩地，兩車分別每隔20公里及15公里設有分站，已知整條公路上，包括兩端的總站共有25個站頭，求路長。



解答



1. 要平均分配320個蘋果、240個梨、200條香蕉，又沒有水果剩餘的話，只須求得三數的最大公因數，用質因數連乘積表示三數：

$$320 = 2^6 \times 5$$

$$240 = 2^4 \times 3 \times 5$$

$$200 = 2^3 \times 5^2$$

所以最多可將上述水果平均分給 $2^3 \times 5 = 40$ 個小孩。

2. 把八個數平分成兩組，每組4個數，每組的四個數中含的質因數應該一樣。

把已知八個數分解成質因數連乘積：

$$9 = 3^2$$

$$28 = 2^2 \times 7$$

$$52 = 2^2 \times 13$$

$$57 = 3 \times 19$$

$$65 = 5 \times 13$$

$$69 = 3 \times 23$$

$$95 = 5 \times 19$$

$$161 = 7 \times 23$$

	I	IV	II	V	III
--	---	----	----	---	-----

我們由最小因子「2」開始（當然，我們不一定由「2」開始，也會得到相同的答案，但要做得快而準，那就一定要按步就班地去幹了）。

由(I)可知28和52必須分別置於不同組別。

由(II)、(III)得分組的情況為{28,69}，{52,161}。

由(IV)得{28, 57, 69}，{9, 52, 161}，

最後，由(V)得{28, 57, 65, 69}，{9, 52, 95, 161}。

3. 類似題2的做法，先把十個數表成質因數連乘積：

$$21 = 3 \times 7$$

$$22 = 2 \times 11$$

$$34 = 2 \times 17$$

$$39 = 3 \times 13$$

$$44 = 2^2 \times 11$$

$$45 = 3^2 \times 5$$

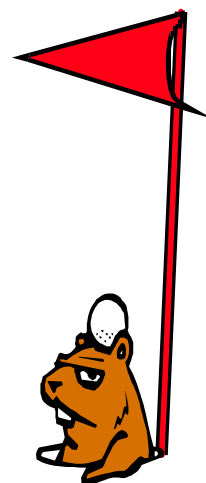
$$65 = 5 \times 13$$

$$76 = 2^2 \times 19$$

$$133 = 7 \times 19$$

$$153 = 3^2 \times 17$$

	VII	III	V	II	VIII	IV	VI	I
--	-----	-----	---	----	------	----	----	---



今次我們由最大因子「19」開始。

由(I)得知76和133必須置在不同組別。

由(II)得分組情況為{21, 76}, {133},

由(III)可以知道21和39那單一的因子「3」, 會逼使39與133同組, 即分組為{21, 76}, {39, 133}。

由(IV)和(V)可得{21, 65, 76}, {39, 45, 133}。

由(III)可知, 45所含的因子「 3^2 」, 會逼使45與153必須分置於不同組別; 同理, 由(VI)可知, 153所含的因子「17」會逼使34和153分置於不同組別, 故此得分組情況為{21, 65, 76, 153}, {34, 39, 45, 133}。

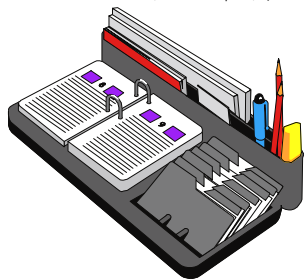
最後, 由(VII)及(VIII), 得{21, 22, 65, 76, 153}, {34, 39, 44, 45, 133}。

4. 已知四個數的和是1111, 那先將1111表成質因數連乘積:

$$1111 = 11 \times 101$$

若果取四個數是 $a \times 101$ 、 $b \times 101$ 、 $c \times 101$ 、 $d \times 101$, 其中 $a + b + c + d = 11$, 馬上可以知道這四個數的最大公因數是101。

5. 分配433枝鉛筆剩13枝, 260塊擦膠剩8塊, 所以只須求出420和252的最大公因數。



$$420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$$

$$252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$$

最大公因數是 $2^2 \times 3 \times 7 = 84$, 但題目指出小學生的人數在30以上, 50以下, 所以人數應為 $2 \times 3 \times 7 = 42$ 人。

6. 分配115塊糖、142塊餅、72個桔, 結果剩7塊糖, 欠2塊餅, 因為

$$115 - 7 = 108$$

$$144 + 2 = 144$$

所以108、144、72的最大公因數 = 36, 就是小朋友的人數。

7. 某數除360、314、245均得相同的餘, 則它們的差必為該數的倍數。因為

$$360 - 314 = 46 = 2 \times 23$$

$$314 - 245 = 69 = 3 \times 23$$

$$360 - 245 = 115 = 5 \times 23$$

所以該數應為23。

8. 要用長9cm, 闊6cm, 高7cm的長方體木塊疊成一個大正方體, 則正方體的邊長必須能被9、6、7整除, 也就是三數的最小公倍數。明顯, 9和6的最小公倍數是18。因7跟9和6互質(relatively prime), 所以三數的最小公倍數 $7 \times 18 = 126$ 。

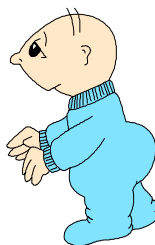
所以, 長方形體木塊的數目 = $(126 \div 9) + (126 \div 6) + (126 \div 7) = 5292$ 塊



9. $3、4、5、6$ 的最小公倍數 $= 2^2 \times 3 \times 5 = 60$ ，所以符合條件的數目最小是62。
 現在只須將62加上60的倍數，能被7整除的就是筆的數目了。
 $62 + 60 = 122$ 除以7餘3，不合條件；
 $122 + 60 = 182$ 除以7餘0。
 所以筆的數目有182枝。

10. 符合「除5餘2，除7餘3」的數最小是17，而5和7的最小公倍數是35。只須將17依次加上35，若得數除9餘4，就是所求桃子的數目了。
 $17 + 35 = 52$ 除以9餘7，不合條件。
 $52 + 35 = 87$ 除以9餘6，不合條件。
 $87 + 35 = 122$ 除以9餘5，不合條件。
 $122 + 35 = 157$ 除以9餘4，不合條件。
 $157 + 35 = 192$ 除以9餘3。
 所以桃子的數目應為192。

11. $10、9、\dots、2$ 的最小公倍數 $= 2520$ ，
 所以約5000又符合「除10、9、...、2均欠1」的數
 $= 2520 \times 2 - 1$
 $= 5039$



12. 因為5、6、7三數互質，所以三個數的L.C.M. $= 5 \times 6 \times 7 = 210$ 。
 所以被5、6、7三數除餘1的最小數 $= 210 + 1 = 211$ 。
 因為 $10000 \div 210 = 47 \dots 130$ ，
 所以最後一個被5、6、7除餘1的數 $= 210 \times 47 + 1$
 $= 9871 < 10000$
 所以符合條件的自然數共有47個。

13. 由兩次分蘋果所得的數目可知，蘋果的數目應是6和10的倍數，由於題目要求算出小班最少可得的蘋果數目，所以蘋果的數目必然是6和10的最小公倍數。
 \therefore 6和10的最小公倍數 $= 30$
 \therefore 幼稚園的總人數 $= 30 \div 6$
 $= 5$ 人
 大班的人數 $= 30 \div 10$
 $= 3$ 人
 小班的人數 $= 5 - 3$
 $= 2$ 人
 \therefore 將蘋果分給小班，每人可得 $30 \div 2 = 15$ 個。



14. 要這條公路符合每 20 公里及 15 公里設有分站，路長必是兩數的公倍數，可設成 $(60x)$ 公里（20 和 15 的最小公倍數是 60）長；其中 x 為一正整數。

從一端出發，首 60 公里，甲車到過兩端的兩站及其他 2 個站，

乙車到過兩端的兩站及其他 3 個站，

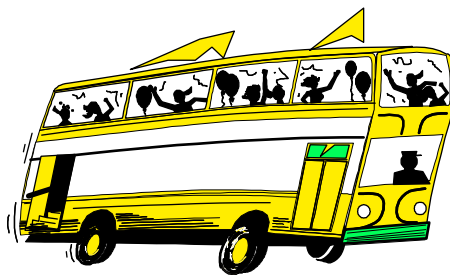
兩車合共到過兩端的兩站及其他 5 個站；

同樣情況，在路長 $(60x)$ 公里的公路上，兩車共到過 $(6x + 1)$ 個站，

由條件 $6x + 1 = 25$

得出 $x = 4$

於是求得整條公路長 240 公里。



完

顧問老師：林麗雯、梁志明、謝慧、黃萬安、黃偉智、楊振雄、袁仲強