

# 解難之趣



## 屯門區小學數學比賽專題特刊 第二十屆

二零一零年三月二十日

### 行程問題

行程問題是研究速度（一般以 $s$ 表示）、時間( $t$ )和距離( $d$ )之間關係的問題。解答這類應用題必先要弄清題意，畫出線段圖，分析各數之間的關係，從而弄清速度、時間、距離三者間的關係，再選擇解答方法。



行程問題主要應用公式是：距離 = 速度  $\times$  時間（即  $d = s \times t$ ），

它大致還可以細分為以下三種情況：

(1) 相向（ $\rightarrow \leftarrow$ ）而行：相遇時間 = 距離  $\div$  速度和

(2) 相背（ $\leftarrow \rightarrow$ ）而行：相背距離 = 速度和  $\times$  時間

(3) 同向（ $\rightarrow \rightarrow$ ）而行：速度慢的在前，快的在後。

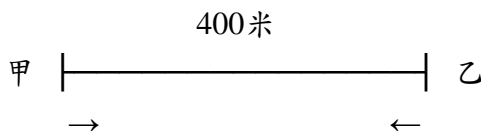
追及時間 = 追及距離  $\div$  速度差

### 瞭解題意，善用公式

例一：甲和乙家相距400米，兩人同時從家中出發在同一條路上行走。甲每分鐘走60米，乙每分鐘走70米。3分鐘後兩人相距多少米？

解答：由於題目沒有指出兩人行走的方向，因此，要考慮四種情況：

(1) 甲、乙相向而行



由公式(1) 距離 = 速度和  $\times$  相遇時間

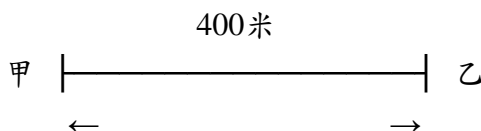
$$\therefore 3\text{分鐘後兩人共行} = (60 + 70) \times 3$$

$$= 390\text{米}$$

$$\therefore 3\text{分鐘後兩人相距} = 400 - 390$$

$$= 10\text{米。}$$

(2) 甲、乙相背而行



由公式(2) 相背距離 = 速度和 × 時間

$$\therefore 3\text{分鐘後兩人共行} = (60 + 70) \times 3$$

$$= 390\text{米}$$

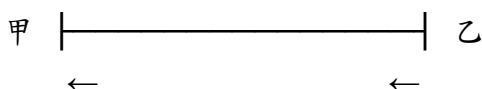
$$\therefore 3\text{分鐘後兩人相距} = 400 + 390$$

$$= 790\text{米}$$



(3) 甲在前，甲、乙同向而行

400米



由公式(3) 追及距離 = 速度差 × 追及時間

$$\therefore 3\text{分鐘後兩人共行} = (70 - 60) \times 3$$

$$= 30\text{米}$$

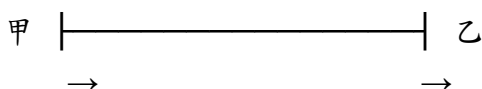
$\therefore$  乙行得比甲快，

$$\therefore 3\text{分鐘後兩人相距} = 400 - 30$$

$$= 370\text{米。}$$

(4) 乙在前，甲、乙同向而行

400米



由公式(3) 追及距離 = 速度差 × 追及時間

$$\therefore 3\text{分鐘後兩人共行} = (70 - 60) \times 3$$

$$= 30\text{米}$$

$\therefore$  甲行得比乙慢，

$$\therefore 3\text{分鐘後兩人相距} = 400 + 30$$

$$= 430\text{米。}$$

上述例題雖然簡單，卻已總括了解決行程問題的要訣：了解題意，畫出線段圖，再善用公式；還要加上三分小心！否則同學很可能會在以下例題上當。

## 火車過橋

**例二：**一列火車長300米，以每分鐘400米的速度通過一座900米的大橋。問全車通過大橋共需要多少時間？

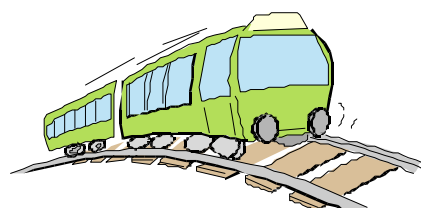
**解答：**同學請小心！時間不是  $900 \div 400 = 2.25$  分鐘。

因為題目要求「全車」通過大橋，所以我們得連同

火車的車長也一併計算在內，即

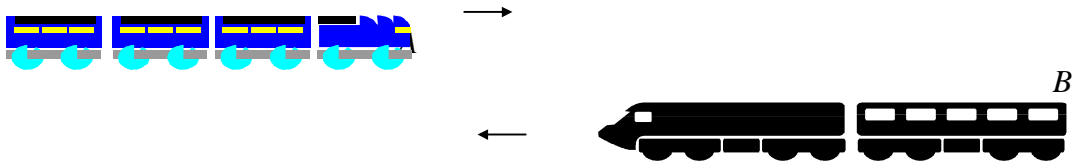
$$\text{所需時間} = (900 + 300) \div 400$$

$$= 3\text{分鐘}$$



例三：一列客車以每小時72千米的速度行駛，行駛中，客車的司機發現迎面而來一列貨車，以每小時54千米速度行駛。這列貨車從他身邊駛過共用了8秒，求貨車的長度。

解答：這是相遇問題，我們把客車司機設想為A，貨車車尾有某人B，那麼A、B相遇的路程就是貨車的長度。



已知相遇時間 = 8秒，

客車速度 =  $72000 \div 3600 = 20$  米／秒

貨車速度 =  $54000 \div 3600 = 15$  米／秒

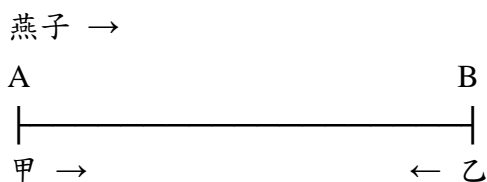
由公式(1)得

$$\begin{aligned} \text{A、B相遇路程} &= \text{速度和} \times \text{相遇時間} \\ &= (20 + 15) \times 8 \\ &= 280 \text{米} \end{aligned}$$

### 燕子來回飛，路程有多遠？

例四：A、B兩地相距440千米，甲、乙兩車同時從兩站相對開出，甲車每小時行35千米，乙車每小時行45千米。一隻燕子以每小時50千米的速度和甲車同時出發，向乙車飛去，遇到乙車又折回向甲車飛去，遇到甲車又折回飛向乙車，這樣一直飛下去，問燕子飛了多少千米，兩車才能相遇？

解答：同學們是否給燕子來回飛行弄得有點頭昏腦脹呢？但細心把問題一想，我們根本就無須理會到底燕子來回飛行了多少次。既知燕子飛行速度，要求燕子飛行的路程，只需求出燕子飛行的時間，不就可以得到答案嗎？而燕子飛行的時間也就是甲、乙兩車從出發到相遇所用的時間，這樣一來問題就解決了。



$$\begin{aligned} \text{(1) 燕子的飛行時間} &= 440 \div (35 + 45) \\ &= 5.5 \text{小時} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(2) 燕子飛行的距離} &= 50 \times 5.5 \\ &= 275 \text{千米} \end{aligned}$$

∴ 燕子飛行了275千米，兩車才能相遇。



**例五：**當甲在60米賽跑衝過終點時，比乙領先10米，比丙領先20米，如果乙和丙按原來的速度繼續跑向終點，那麼當乙到達終點時將比丙領先多少米？

**解答：**同學不要以為乙衝過終點時比丙領先 $20 - 10 = 10$ 米。錯！因為甲、乙、丙的速度都不同，過了一定時間後，距離怎也不會一樣！

**解法一：**

在同樣時間內，甲跑60米，乙跑50米，丙跑40米，也就是說，在相同單位時間（註：不一定是1秒）內甲跑6米，乙跑5米，丙跑4米。

∴乙還有10米路程才到終點，

$$\begin{aligned} \therefore \text{乙需時} &= 10 \div 5 \\ &= 2 \text{個單位時間} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{在同樣時間內，丙跑了的距離} &= 4 \times 2 \\ &= 8 \text{米} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{當乙到達終點時，乙、丙相距} &= 60 - (40 + 8) \\ &= 12 \text{米} \end{aligned}$$



**解法二：**

在相同時間內，乙跑50米，丙跑40米，可知丙速是乙速的 $\frac{4}{5}$ ，

$$\begin{aligned} \text{所以，當乙到達終點時，丙的行程} &= 60 \times \frac{4}{5} \\ &= 48 \text{米。} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{當乙到達終點時，乙、丙相距} &= 60 - 48 \\ &= 12 \text{米} \end{aligned}$$

**解法三：**

由於乙、丙兩人速度不變，

$$\begin{aligned} \text{又丙與乙在第一段時間內的路程差} &= 50 - 40 \\ &= 10 \text{米，即乙的路程的} \frac{1}{5} \end{aligned}$$

所以當乙跑完後10米時，丙在第二段時間與乙的路程差  $= 10 \times \frac{1}{5} = 2$ 米。

$$\begin{aligned} \therefore \text{乙、丙路程差的和} &= 10 + 2 \\ &= 12 \text{米。} \end{aligned}$$

**解法四：**

設乙到達終點時，比丙領先 $x$ 米。

根據兩人速度不變可知，在同樣時間內兩人行程的比值不變，故列式為：

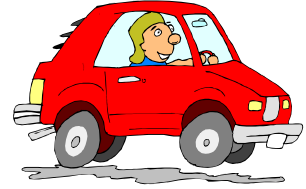
$$\begin{aligned} 40 : 50 &= (60 - x) : 60 \\ 3000 - 50x &= 2400 \quad (\text{內項相乘} = \text{外項相乘}) \\ \therefore x &= 12 \text{米} \end{aligned}$$



## 習題

1. 小明和小強一起跳繩，小明先跳了2分鐘，然後兩人共同跳了3分鐘，一共跳了780下，知道小明比小強每分鐘多跳12下，求小明每分鐘跳繩幾少？

2. 甲、乙兩輛汽車同時從A、B兩地相向開出，甲車每小時行56千米，乙車每小時行48千米，兩車在離中點32千米處相遇。求A、B兩地的距離。



3. 小明從家到學校，先用每分鐘50米的速度走2分鐘後，感到這樣走下去，他上課就要遲到8分鐘。後來他改用每分鐘60米的速度前進，結果早到5分鐘。問這個學生的家離學校多遠？

4. 甲、乙兩車分別從A、B兩地相對開出，經過5小時後相遇。相遇後各自繼續前行，又經過3小時，甲車到達B地，這時乙車距離A地還有120千米。求A、B兩地的距離。

5. 一列快車和一列慢車相向而行，快車的車長是280米，慢車的車長是385米，坐在快車上的人看見慢車駛過的時間是11秒，那麼坐在慢車看見快車駛過的時間是多少？

6. 龜兔賽跑，全程5300米，兔子跑的速度是龜爬行速度的6倍。已知龜每小時行2500米。同時起跑後，兔子是邊跑邊玩的。它開跑1分鐘後，停下來玩10分鐘，再跑2分鐘，然後玩15分鐘，再跑3分鐘，玩20分鐘……（每停下一次都比上一次多玩5分鐘），龜在起跑後每行500米休息1分鐘。這樣先到達終點的比後到達的快多少分鐘？



7. 在環形跑道上，兩人都按順時針方向跑時，每12分鐘相遇一次。如果兩人速度不變其中一人改成按逆時針方向跑，則每隔4分鐘相遇一次，問兩人各跑一圈需時多久？

8. 一輛車從甲地開往乙地，如果把車速提高20%，可以比原定時間提前1小時到達；如果以原速行駛120千米後，再將速度提高25%，則可提前40分鐘到達，那麼，甲、乙兩地相距多少千米？



# 解答

1. 設小強每分鐘跳繩 $x$ 下，則小明每分鐘跳繩 $(x + 12)$ 下。將題目代數化：

文字題	代數式
小明先跳2分鐘	$2(x + 12)$
小強和小明共同跳3分鐘	$3x + 3(x + 12)$
共跳了780下	$2(x + 12) + 3x + 3(x + 12) = 780$

$$\therefore 8x + 60 = 780$$

$$x = 90$$

$\therefore$  小明跳繩108下。

2. 注意條件「甲快、乙慢，兩車在離中點32千米處相遇」，不能理解為甲比乙多行32千米。應先求甲車比乙車多行 $32 \times 2 = 64$ 千米。

又甲車比乙車每小時多行  $= 56 - 48$

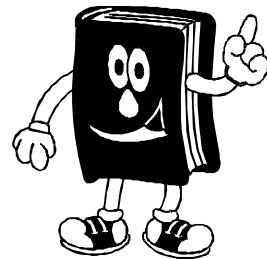
$$= 8 \text{ 千米}$$

$\therefore$  甲、乙兩車從同時出發到相遇的時間  $= 64 \div 8$

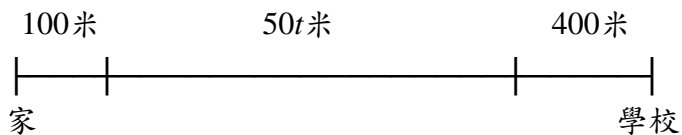
$$= 8 \text{ 小時}$$

最後A、B兩地的距離  $= (56 + 48) \times 8$

$$= 832 \text{ 千米}$$

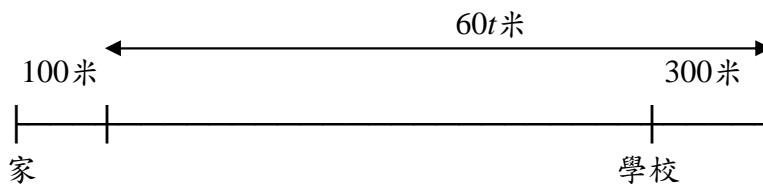


3. 本題須注意時間是不變的。假設小明行了2分鐘後，尚餘 $t$ 分鐘，則小明的家與學校的距離可用以下兩式表示：



$$\text{距離} = 50t + 500 \quad \dots\dots(1)$$

又



$$\text{距離} = 60t - 200 \quad \dots\dots(2)$$

由(1)、(2)兩式相等，得

$$50t + 500 = 60t - 200$$

$$10t = 700$$

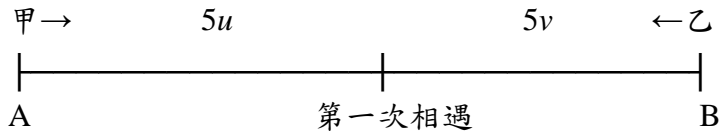
$$t = 70 \text{ 秒}$$

$\therefore$  小明家與學校的距離  $= 50 \times 70 + 500$

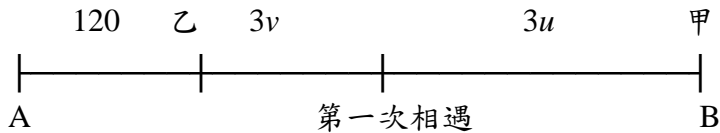
$$= 4000 \text{ 米}$$



4. 設A、B兩地相距 $s$ 千米，甲車速度為 $u$ 千米／小時，乙車為 $v$ 千米／小時，則



相遇後，甲再行3小時就到達B地，乙則尚距A地120千米，所以



由距離公式，得

$$s = 5(u + v) \quad \dots\dots (1)$$

$$s = 8v \quad \dots\dots (2)$$

$$s = 8u + 120 \quad \dots\dots (3)$$

(2)式 + (3)式，得

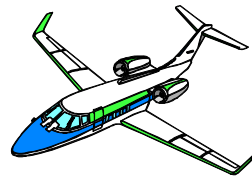
$$2s = 8(u + v) + 120 \quad \dots\dots (4)$$

$$\text{由(1)式得 } u + v = \frac{s}{5} \quad \dots\dots (5)$$

將(5)式代入(4)式，得

$$2s = 8\left(\frac{s}{5}\right) + 120$$

$$s = 300 \text{ 千米}$$



5. 設快車和慢車的速度分別為每秒 $u$ 和 $v$ 米。有一人A坐在快車車頭，另一人B坐在慢車車尾，則A看見慢車駛過的時間可視為A、B的相遇時間；所經過的距離就是慢車的車長（385米），由公式(1)得：

$$385 \div (u + v) = 11$$

$$(u + v) = 35$$

同理，B看快車駛過的時間就是A、B相遇的時間，不過今次走過的距離卻是快車的車長（280米），由公式(1)得：

$$\text{相遇時間} = 280 \div (u + v)$$

$$= 280 \div 35$$

$$= 8 \text{ 秒}$$

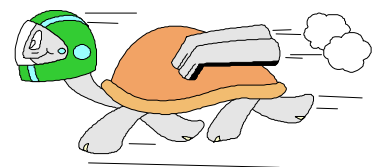
6. 首先將龜、兔的速度統一以每分鐘表示：

龜每小時走2500米，分鐘走 $\frac{250}{6}$ 米，

兔的速度是龜的6倍，所以每分鐘走250米。

由題意知龜每走500米休息1分鐘，所以龜每走500米需時 $= 500 \div \frac{250}{6} + 1 = 13$ 分鐘

$$\therefore \text{走完5300米共需時} = 13 \times 10 + 300 \div \frac{250}{6} = 137.2 \text{ 分鐘}$$



兔走1分鐘，玩10分鐘，然後每多走1分鐘，多玩5分鐘，先算一算兔需要走幾分鐘才走完全程。若兔需走到第「6」分鐘，則

$$\text{兔所走的距離} = 250(1+2+3+4+5+6)$$

$$= 5250 < 5300$$

$$\therefore \text{兔走完} 5250 \text{米共需時} = 21 + (10 + 15 + 20 + 25 + 30 + 35)$$

$$= 156 \text{分鐘}$$

$$\text{兔走完尚餘路程需時} = (5300 - 5250) \div 250$$

$$= 0.2 \text{分鐘}$$

$\therefore$  兔共需時156.2分鐘走完全程。

$\therefore$  龜比兔快  $156.2 - 137.2 = 19$ 分鐘到達終點。

7. 設甲、乙的速度分別為  $u$ 、 $v$ （為方便計算，假設甲比乙快，即  $u > v$ ），環形跑的一圈的距離為  $d$ 。當他們同向而行時，由公式(3)得：

$$u - v = \frac{d}{12} \quad \dots\dots(1)$$

當他們相向而行時，由公式(1)得：

$$u + v = \frac{d}{4} \quad \dots\dots(2)$$

$$(1) + (2), \quad u = \frac{d}{6}$$

$$(1) - (2), \quad v = \frac{d}{12}$$

由距離公式，我們可以在上兩式的分母中讀出兩人各跑一圈的時間：甲要6分鐘，乙要12分鐘。

8. 設甲、乙兩地相距  $d$  千米，汽車原來的速度為  $v$  千米／小時。則我們有下列資料：

原行車時間 =  $\frac{d}{v}$ ；速度提高120%後的行車時間 =  $\frac{d}{1.2v}$ ；速度提高125%後的行車時間

=  $\frac{d}{1.25v}$ 。依題意，我們歸納為下式：

$$\begin{cases} \frac{d}{v} - \frac{d}{1.2v} = 1 & \dots\dots(1) \\ \frac{d}{v} - \left(\frac{120}{v} + \frac{d-120}{1.25v}\right) = \frac{2}{3} & \dots\dots(2) \end{cases}$$

由(1)得，  $d = 6v \quad \dots\dots(3)$

代(3)入(2)，  $6 - \frac{120}{v} - \frac{6v-120}{1.25v} = \frac{2}{3}$

$$v = 45$$

$$\therefore d = 6(45) = 270 \text{千米。}$$

