解難之趣

屯門區小學數學比賽專題特刊

第十九屆 二零零九年四月二十五日

在數學競賽，有一些用途廣泛的數學原／定理，由於它們的陳述很簡單，所以很少以獨立的專題來討論；今次，我們選了幾個原理跟同學分享。

加法原理

做一件事，完成它可以有 n 類辦法，在第一類辦法中有 m_1 種不同的方法，在第二類辦法中有 m_2 種不同的方法，……，在第 n 類辦法中有 m_n 種不同的方法，那麼完成這件事的不同方法的數目爲 $N = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$。

例 1：從甲地到乙地，可以乘火車、公共汽車、輪船前往。如果每天分別火車有 5 班，汽車有 4 班，輪船有 3 班，那麼，每天從甲地到乙地共有多少種不同的走法？

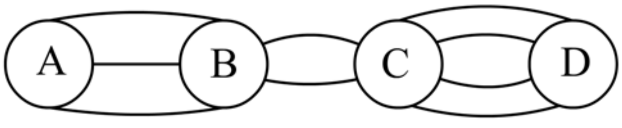
解答： 無論選甚麼交通工具，都是同一類的東西；也就是說，你可以選擇乘火車、汽車或輪船，但是選了任何一類後，就不能再選其他的了，所以，

按加法原理，不同的走法共有 $5+4+3=12$ 種。

乘法原理

乘法原理：做一件事，完成它需要分成 n 個步驟，做第一步有 m_1 種不同的方法，做第二步有 m_2 種不同的方法，……，做第 n 步有 m_n 種不同的方法，那麼完成這件事的不同方法的數目爲 $N = m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_n$。

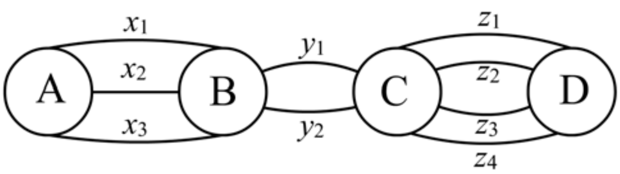
例 2：從 A 地到 D 地，途中要經過 B、C 兩地。從 A 地到 B 地有 3 條路，從 B 地到 C 地有 2 條路，從 C 地到 D 地有 4 條路，那麼從 A 地到 D 地有多少種不同的走法？



解答： 從 A 地到 B 地有 3 種走法，到達 B 地後，對應著每一種走法，又有 2 種不同的走法可以到達 C 地。最後，從 C 地又會有 4 種不同的走法可以到達 D 地，所以從 A 地去 D 地，共有 $3\times2\times4=24$ 不同的走法。

為要更清楚地闡明上例，我們不妨令從 A 地到 B 地的 3 條路為 x_1、x_2、x_3，從 B 地到 C

地的 2 條路為 y_1、y_2，從 C 地到 D 地的 4 條路為 z_1、z_2、z_3、z_4，如下圖



然後，以表列方式表示出可能的走法：

x_1	y_1z_1	y_2z_1
	y_1z_2	y_2z_2
	y_1z_3	y_2z_3
	y_1z_4	y_2z_4

x_2	y_1z_1	y_2z_1
	y_1z_2	y_2z_2
	y_1z_3	y_2z_3
	y_1z_4	y_2z_4

x_3	y_1z_1	y_2z_1
	y_1z_2	y_2z_2
	y_1z_3	y_2z_3
	y_1z_4	y_2z_4

明顯地，共有 $3\times 8=24$ 種不同的走法。

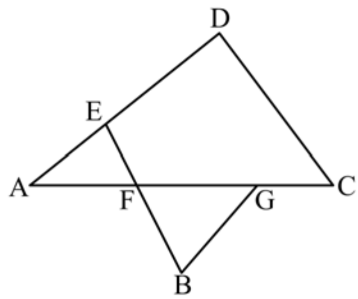
這裏要注意區分加法原理和乘法原理，要做一件事，完成它若是有 n 類辦法，是分類問題，第一類中的方法都是獨立的，因此用加法原理；做一件事，需要分 n 個步驟，步與步之間是連續的，只有將分成的若干個互相聯繫的步驟，依次相繼完成，這件事才算完成，因此用乘法原理。

這樣完成一件事的分“類”和“步”是有本質區別的，因此也將兩個原理區分開來。

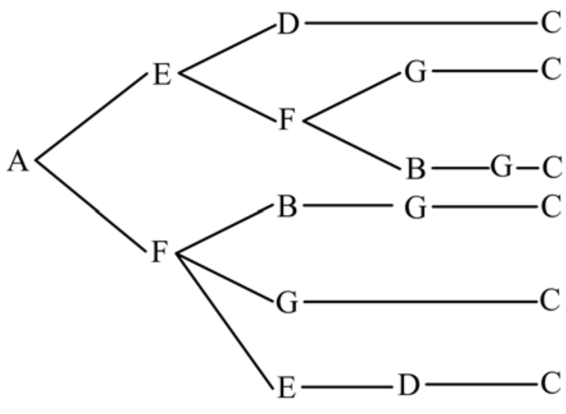
從上述兩例可知，加法原理和法原理常應用於「數路線」(另一種常見的比賽題目是「地圖染色」的問題）的問題上，讓我們看看下列例題，深入了解這兩個原理的使用方法。

例 3：如右圖，由 A 點到 C 點有多少條不同的路線？（每條路線不可經過同一點 2 次或以上）

（第 5 屆屯門區小學數學比賽個人賽第 19 題）



解答：由於點數不多，路線很少，我們不妨以樹形圖列出可行的不同路線。

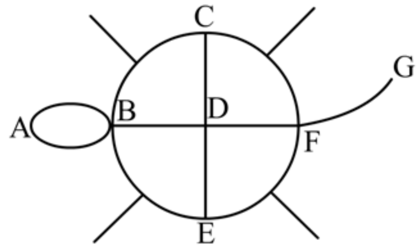


所以，共有 6 條不同的路線。

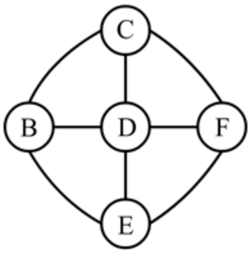
這裡，我們利用加法原理將可能的路線進行歸類，在路線不多的情況下，樹形圖能夠將所有可能的路線清楚呈現。

例 4：如右圖，由 A 點到 G 點有多少條不同的路線？（每條路線不可經過同一點 2 次或以上。）

（第 6 屆屯門區小學數學比賽個人賽第 23 題）



解答： 明顯地，從 A 點到 B 點有 2 種不同的走法，現在，考慮中間的圖形，將圖形簡化如下：



從 B 點到 F 點，途經 1 點的走法有 3 個可能：BCF、BDF、BEF。

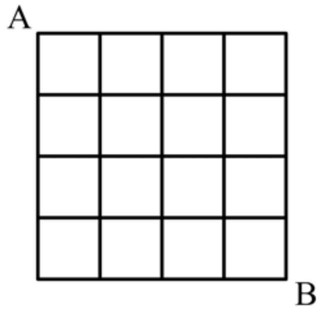
途經 2 點的走法有 4 個可能：BCDF、BEDF、BDCF、BDEF。

途經 3 點的走法有 2 個可能：BCDEF、BEDCF。

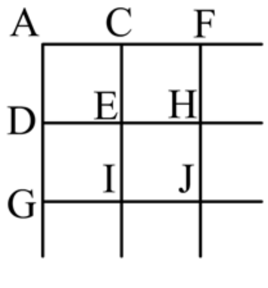
所以，從 B 點到 F 點，共有$3+4+2=9$條不同路線。

從 F 點到 G 點只有一條路可走，所以從 A 點走到 G 點，共有$2\times9=18$條不同的路線。

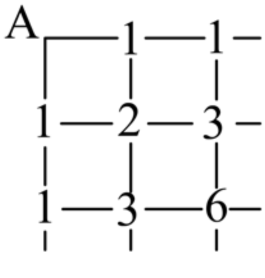
例 5：右圖是某城市的街道圖，若從 A 地到 B 地，規定只能由上到下或由左到右走，共有多少種不同的走法？



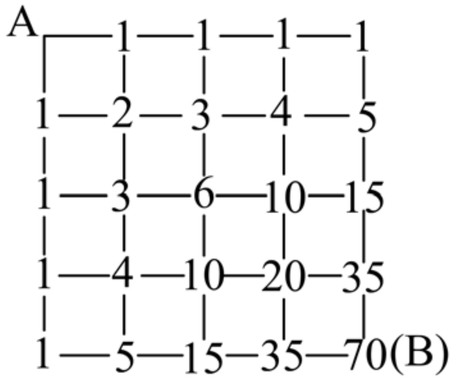
解答： 這是一題典型利用加法原理去數路線的題目。先考慮簡單的情況，由於規定「只能由上到下或由左到右走」，如下圖一，從 A 點到 C、D 點只有 1 種走法，而按加法原理，走到 E 點就有 2 種走法。同理，到達 F、G 點只有 1 種走法，H、I 點有 3 種走法，而到達 J 點就有 6 種走法（下圖二）。



圖一



圖二



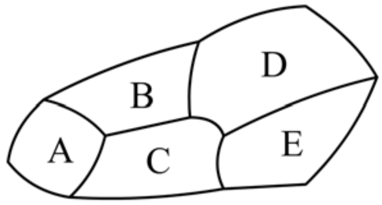
圖三

如此類推，得圖三，走到 B 點共有 70 種不同的走法。

除了數路線問題外，地圖染色問題亦常用到加法原理和乘法原理，讓我們看看下列。

例 6：右圖中，A、B、C、D、E五個區域，以紅、黃、藍三色去塗，相鄰區域塗上不同顏色，共有多少種塗法？

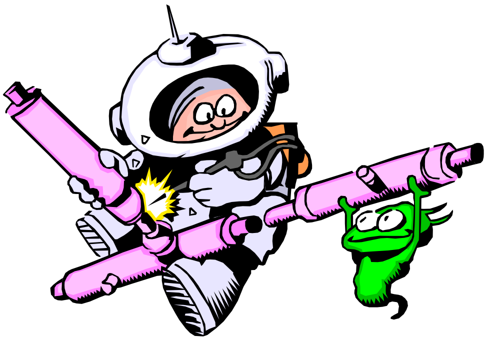
（第 13 屆屯門區小學數學比賽個人賽第 19 題）

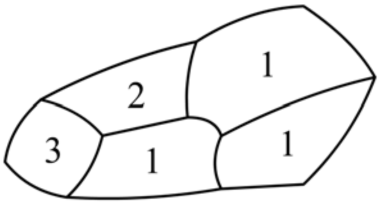


解答： 首先，可以紅、黃、藍任一顏色去塗A區。由於B、C區與A相連，而B、C兩區亦相連接，所以可塗在B區的顏色

減到2種，塗在C區的減到1種。

雖然E區並不與B區相連，理論上可選的顏色有2種，但這樣做的話，D區將無法著色，所以，可塗上的顏色數目如下：





按乘法原理，共有 $3\times2\times1\times1\times1=6$ 種不同的塗色方法。

例 7：從 1 至 500 中，不含數字 3 的數有多少？

解答： 在一位數中，不含數字 3 的數有 8 個，即 1、2、4、5、6、7、8、9。

在兩位數中，個位不含數字 3 的數有 9 個可能（0、1、2、4、5、6、7、8、9），十位不含數字 3 的數有 8 個可能（1、2、4、5、6、7、8、9），所以不含數字 3 的兩位數有 $9\times8=72$ 個。

在三位數中，個位不含數字 3 的數有 9 個可能，十位不含數字 3 的數也有 9 個可能，百位不含數字 3 的數有 3 個可能（1、2、4），連同 500 在內，不含數字 3 的三位數有 $9\times9\times3+1=244$ 個。

所以，按加法原理，1 至 500，不含數字 3 的數共有 $8+72+244=324$。

看過比賽的例子後，讓我們想一想在日常生活會遇到的問題。例如，在一次舊同學的聚會中，有 11 個人與會，若果他們每人都跟其他人握手一次，那麼，他們共握手多少次呢？

或者同學會說：「太老套了！我們聚會不握手啊！」

那麼，要舉辦一次 15 人參加的象棋比賽，以單循環賽制進行，一共要比賽多少場呢？

如果，同學是足球愛好者，你有想過英格蘭超級足球聯賽每一個球季共比賽多少場呢？

首先，我們先要知道英格蘭超級足球聯賽共有 20 支球隊參予，以雙循環賽制，每支球隊都會主場迎戰其他球隊一次，亦要作客出戰其他球隊一次。那麼每支球隊都要作賽 $(20-1)\times2=38$ 場，故此，整季就要比賽 $20\times38=380$ 場。

單循環賽制就是每兩個參加者只比賽一場，那麼，15 人參加的象棋比賽，每人就要比賽 $15-1=14$ 場，但「我跟你比賽」與「你跟我比賽」是相同事，所以 15 人參加的比賽共要比賽 $\dfrac{15\times(15-1)}{2}=105$ 場。

其實，每個人都跟其他人「握手一次」，與「比賽一場」是一樣的，所以 11 人的聚會中，他們共握手 $\dfrac{11\times10}{2}=55$ 次。不過，我們可以這樣想：將 11 人編號為 1-11，第 1 號與其他 10 人握手後就離開了，這樣他共握了 10 次手。然後，在這 10 人中，第 2 號重複第 1 號的動作，他就會握手 9 次了。如推類推，直到最後剩下 2 人握手 1 次。這樣，他們共握手

$$10+9+8+7+6+5+4+3+2+1=\frac{10\times(10+1)}{2}=55\text{ 次。}$$

鴿巢原理

（摘自維基共享資源）

鴿巢原理(Pigeonhole principle)，又名抽屜原理(box (drawer) principle)。最先由德國數學家狄利克雷(Dirichlet)於 1834 年在其著作《*Schubfachprinzip* ("drawer principle" or "shelf principle")》中提出。其中一種簡單的表述法為：

(I)「若有 n 個籠子和 $n+1$ 隻鴿子，所有的鴿子都被關在鴿籠裡，那麼至少有一個籠子有至少 2 隻鴿子。」

或者這麼說：

(II)「若有 n 個籠子和 $kn+1$ 隻鴿子，所有的鴿子都被關在鴿籠裡，那麼至少有一個籠子有至少 $k+1$ 隻鴿子。」

雖然鴿巢原理看起來很容易理解，但有時使用鴿巢原理會得到一些很有趣的結論：

例如：香港最少有兩個人頭髮數一樣多。

因為，常人的頭髮數目在 15 萬左右，可以假定沒有人有超過 100 萬根頭髮，但香港人口大於 100 萬。如果我們讓每一個鴿巢對應一個頭髮數字，鴿子對應於人，那就變成了有大於 100 萬隻鴿子要進到至多 100 萬個巢中。所以，結論很明顯。

另一個例子：盒子裡有 10 隻黑襪子、12 隻藍襪子，你需要拿一對同色的出來。假設你總共只能拿一次，而且拿的時候還看不到，那你至少應該拿幾隻出來，才能保證有一雙同色的呢？可能有人會脫口而出「13 隻！」其實 3 隻就可以了，因為顏色只有兩種（鴿巢只有兩個），而三隻襪子（三隻鴿子），結論就明顯了。

更不直觀的例子：有 n 個人（至少 2 人）互相握手（隨意找人握），必有兩人握手次數相同。

這裡，鴿巢對應於握手次數，鴿子對應於人，每個人都可以握 0、1、2、…、$n-1$ 次手——但 0 和 $n-1$ 不能同時存在，因為如果一個人不和任何人握手，那就不會存在一個和所有其他人都握過手的人——所以鴿巢是 $n-1$ 個，但有 n 個人（n 隻鴿子），按原理必有一個鴿巢最少有 2 隻鴿子。

好了，讓我們也從過去的比賽題目中，好好學習一下鴿巢原理的應用。

例 8：一個袋裡有紅珠6粒，黃珠8粒，藍珠10粒。最少要抽出多少粒珠才可保證有3粒是同一顏色？（第6屆屯門區小學數學比賽個人賽第24題）

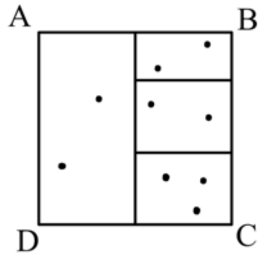
解答： 這個簡單的題目。想像一下最差的情況，先抽到紅珠、黃珠、藍珠各 2 位，到抽出第 7 粒珠的時候，不論是紅、黃、藍任何一種顏色，都會馬上符合 3 粒同色的要求，所以最少要抽出 7 粒才可保證有 3 粒珠同一顏色。

其實，按鴿巢原理的第二個版本，假定 3 種顏色是鴿巢，那麼抽出的珠數為 $3\times2+1=7$ 時，就會保證有 $2+1=3$ 粒珠在同一鴿巢；即是同顏色。

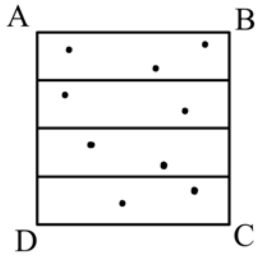
鴿巢原理的應用看似簡單，不過，它應用到證明上卻是非常利害的！讓我們看看下面的例子，以及兩位數學天才因為這原理而相識的趣事。

例 9：在邊長爲 4 的正方形內，隨意放進 9 個點，試證明其中必有 3 點，它們構成的三角形的面積不大於 2。

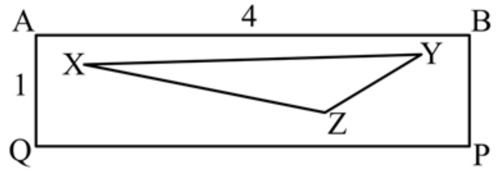
解答：因為$9=2\times4+1$，所以由鴿巢原理解(II)，設有 4 個鴿巢，則可保證至少有一個鴿巢的點數不少於 3 個。我們將正方形分為 4 等份——這是最有可能得到面積大於 2 的做法，若果分得不平均的話，很容易就會得到面積少於 2 的三角形（如圖一）——令其中一份包含 3 個點（如圖二和圖三）：



圖一



圖二



圖三

明顯地，ΔXYZ 的面積必定少於長方形 ABCPQ 內最大的三角形面積！而這個三角形的面積 ΔABP 的面積，即$\frac{1}{2}(4)(1)=2$。得證。

例 10：在一間能容納 1500 個座位的戲院裏，證明如果戲院坐滿人時，一定最少有五個觀衆是同月同日生的。

解答：現在假定一年有三百六十五天。想像有一個很大的鴿巢，這巢有編上“一月一日”，“一月二日”，至到“十二月三十一日”爲止的標誌的間隔。

假定現在每個間隔都塞進四個人，那麼$4\times365=1460$個人是進去籠子的鴿子，還剩下$1500-1460=40$人。只要任何一人進入鴿子籠，就有五個人是有相同的生日了。

例 11：有 $n+1$ 個不相同的正整數，它們全都小於或等於 $2n$，證明當中一定有兩個數是互質的。

解答：讓我們先想一想簡單的情況：

假設$n=3$，則我們有$3+1=4$個數，這些數全都少於或等於$2\times3=6$。取其中 3 個數為 2、4、6，它們均有相同的大於 1 的公因子，故此，任何兩數均不是互質的。但餘下還須取一個數，這時不論取 1、3、5，均會得出兩數互質；取 1 的話，則 1、2 互質，取 3 的話則 2、3 或 3、4 互質…。

當 n 之值較小時，這個問題看似明顯，但當 n 變得很大時，我們怎樣去一一驗證呢？我們當然不用一一驗證，只要利用鴿巢原理，假設有 n 個鴿巢，在第 1 個鴿巢中放 1 和 2、在第 2 個鴿巢中放 3 和 4、在第 3 個鴿巢中放 5 和 6、……、在第 n 個鴿巢中放 $2n-1$和 $2n$。

若從這 n 個鴿巢中隨意抽出 $n+1$ 個數，其中最少有一個盒子的兩個數均會被抽出。由此，可知這$n+1$個數中必定有一對連續數，而明顯地連續數是互質的。

這樣，問題便輕易被解決了！

這條問題由匈牙利大數學家保羅·艾狄胥(Paul Erdős, 1913-1996)向當時年僅 11 歲的波沙(Louis Pősa)提出，而小波沙思考不足半分鐘便能給出正確的答案，他的解答又是那麼巧妙和

精采，令艾狄胥讚歎不已。

路易·波薩（Louis Pősa）是匈牙利的年青數學家，14 歲時已能夠發表相當深度的數學論文。大學還沒有讀完，就已獲得科學博士的頭銜。

他的媽媽是一個數學家。他小時受母親的影響，很愛思考問題。母親看他對數學有興趣，也鼓勵他在這方面發展。她給他一些數學遊戲，或數學玩具啓發他獨立思考問題。在母親的循循善誘之下，他在讀小學時已經自己拿高中的數學書來看了；但真正訓練他成爲一個數學家還是匈牙利鼎鼎有名的大數學家——

保羅・艾狄胥(Erdős Pál，在英語中作 Paul Erdős)，匈牙利籍猶太人，發表論文高達 1475 篇（包括和人合寫的），是當代發表論文數最多產的數學家（僅次於歐拉）；曾和 511 人合寫論文。

艾狄胥四處遊歷，探訪當地的數學家，與他們一起工作，合寫論文。他很重視數學家的培訓，遇到有天份的孩子，會鼓勵他們繼續研究。艾狄胥經常沉思數學問題，視數學為生命，他經常長時間工作，老年仍每日工作 19 小時，酷愛飲咖啡，曾說「數學家是將咖啡轉換成定理的機器」。

因為艾狄胥和別人合寫的論文實在太多了，所以有人定義了艾狄胥數（簡稱艾數）。艾狄胥的艾數為 0，與他直接合作寫論文的人的艾數為 1，與艾數為 1 的人合寫論文的人艾數為 2，依此類推。

艾狄胥在數論、圖論等數學分支有很深入的研究，他把一生獻給數學，從來沒有想到結婚，只和自己的母親爲伴，他經常離開自己的祖國到外國去作研究和演講。在東歐國家裏像艾狄胥能這樣隨意離開自己的國家進出西方世界的數學家並不太多。他到處以數學會友，他在數學方面的多產，以及在解決問題上有巧妙的方法，使他在世界數學界上享有甚高的聲譽。對於他的祖國來講，他重要的貢獻不單是在數學的研究，而是他一回到自己的國家就專心致志地培養年青一代的數學家，告訴他們外國目前數學家注意的問題，擴大他們的視野。

有一次他從國外回來後，聽到朋友講起有一個很聰明的小東西，在小學能解決許多困難的數學問題，於是就登門拜訪這小鬼的家庭。

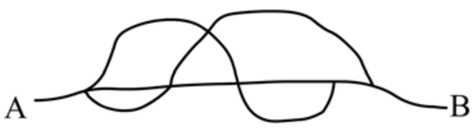
波薩的家人很高興請艾狄胥教授共進晚餐。在喝湯的時候，艾狄胥就是以**例 11** 來考一考坐在他旁邊的 12 歲小孩的能力。

這小鬼不到半分鐘的思考，就很快給出這個問題的解答。他的解答又是那麼巧妙，使得艾狄胥教授歎服。認爲這是一個難得的「英才」，應該好好地培養。

艾狄胥以後系統地教這小鬼數學，不到兩年的時間波薩就成爲一個“小數學家”了。

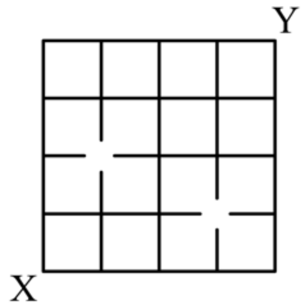
習題

1. 書櫃裡有中文書 6 本，數學書 4 本，英文書 5 本，科學書 3 本，從中任選一本，共有多少種不同的取法？



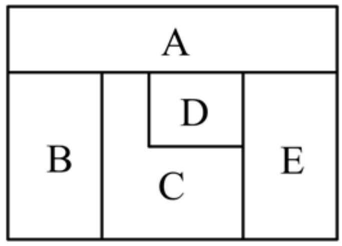
2. 從 A 地到 B 地有道路如下圖所示。只能向前，從 A 地到 B 地有多少條不同路線？
（第 13 屆屯門區小學數比賽個人賽第 15 題）

3. 如果一個四位數與三位數的和是 1999，並且四位數和三位數是由 7 個不同數位組成的，那麼這樣的四位數最多有多少個？



4. 如右圖，由 X 點，經相連的黑線，向上或向右行，到達 Y 點，共有多少條不同的路線？
（第 11 屆屯門區小學數比賽個人賽第 25 題）

5. 如右圖所示，A、B、C、D、E 五個區域分別用紅、藍、黃、白、綠五種顏色中的某一種著色．如果使相鄰的區域著不同的顏色，問有多少種不同的著色方式？



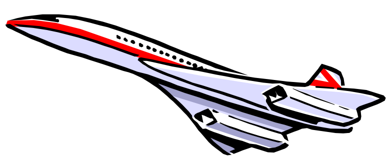
6. 在 1 至 500 中，不含數字 0、1 的數共有多少個？

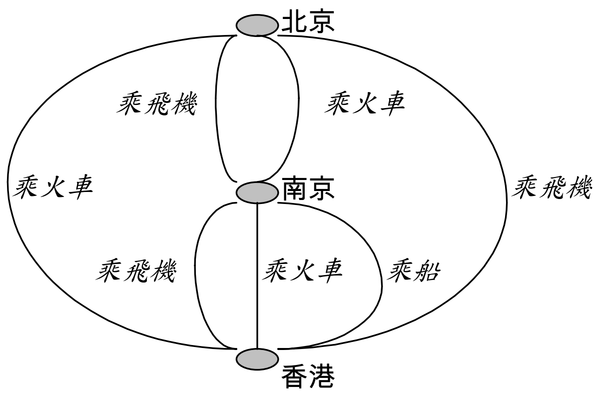
7. 用 1 元、2 元、5 元的硬币凑成 100 元，共有多少种不同的凑法？

8. 從 2、3、4、5、7、9 這 6 個數學中，取 2 個數寫成分數，共有多少個？其中真分數有多少個？最簡分數又有多少個？

9. 10 名運動員進行乒乓球賽（每局 11 分賽制），每兩名運動動員要比賽一場，每場比賽 3 局 2 勝，全部比賽結束後，所有各局比賽最高分數為 15:13，那麼，最少有多少局的比分相同？

10. 下圖列出香港、南京和北京之間的交通方法，現在由南京出發，再回南京，途中須經過香港但不可經過南京，又不准走重複的路線，問共有多少種不同的去法？（**第十屆屯門區小學數比賽個人賽第25題**）





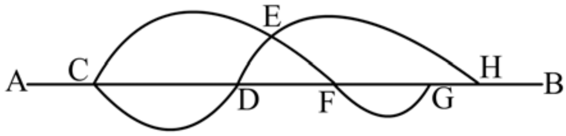
11. 1A班的同學要從8名候選人中選出若干位同學成為班會幹事，如果每個同學只能投票任選兩名候選人，那麼班上最少應有作少個學生，才能保證必有兩個或以上的同學投相同兩名候選人的票？

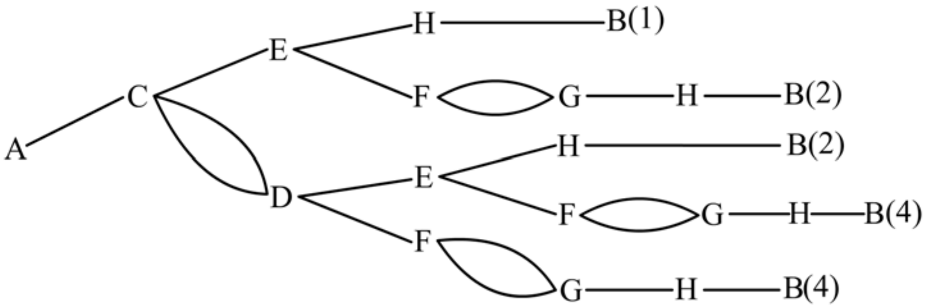
12. 紅、黃、藍、綠的球分有2、3、5、7個混在一起。在黑暗裡看不見的情況下，想從這些球中取出兩對不同顏色的球，問最少要取出多少個球才能保證達到要求？

答案

1. 按加法原理，取法共有 $6+4+5+3=18$ 種。

2. 將路線圖稍作整理，得右圖：
雖然點數不少，但可走的路線也不是很多，
我們利用樹形圖（下圖）去數路線：





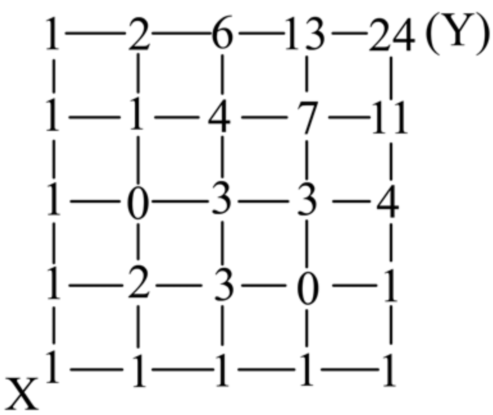
圖中括號的數字顯示從 A 點走到 B 點的可能走法，所以共有 $1+2+2+4+4=13$ 條路線。

3. 依題意得出下列算式：

$$\begin{array}{rcccc} & 1 & A & B & C \\ + & & D & E & F \\ \hline & 1 & 9 & 9 & 9 \end{array}$$

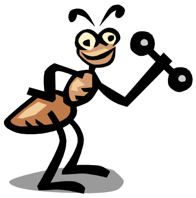
由於 1 已定，相應的 8 也就不能用（因為 $1+8=9$）。明顯地，這算式沒有進位。這樣，對於 D 來說，有 2、3、4、5、6、7、9 共 7 種選擇（D 不能取 0，否則不是三位數），每一種選擇都有相應的 D。對於 E 來說，在剩下的數中有 6 種選擇，每一種選擇都有相應的 B；如果 D 選了 2，那麼，A 必定是 7，這時，E 只有 6 個可能。最後，對於 F 來說，在剩下的數中有 4 種選擇，每一種選擇都有相應的 C。最後，根據乘法原理，共有 $7\times6\times4=168$ 種。

4. 這是一題稍加改變的數路線問題。由於有些路口不通，依例 5 得下圖：



所以，共有 24 條不同路線。

5. 對這五個區域，我們分五步依次給予著色：

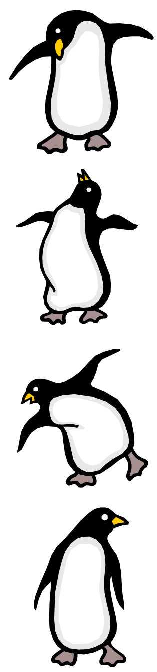


I. 區域 A 共有 5 種著色方式；
II. 區域 B 因不能與區域 A 同色，故共有 4 種著色方式；
III. 區域 C 因不能與區域 A，B 同色，故共有 3 種著色方式；
IV. 區域 D 因不能與區域 A，C 同色，故共有 3 種著色方式；
V. 區域 E 因不能與區域 A，C，D 同色，故共有 2 種著色方式。

於是，根據乘法原理共有 $5\times4\times3\times3\times2=360$ 種不同的著色方法。

6. 在一位數中，不含數字 0、1 的數共有 8 個，即 2、3、4、5、6、7、8、9。
在二位數中，個位不含 0、1 有 8 個可能，十位不含 0、1 也有 8 個可能，所以不含數字 0、1 的二位數有 $8\times8=64$ 個。
在三位數中，個位不含 0、1 有 8 個可能，十位不含 0、1 也有 8 個可能，百位不含 0、1 的只有 3 個可能（2、3、4），所以不含數字 0、1 的三位數有 $8\times8\times3=192$ 個。
所以，按加法原理，在 1 至 500 間，不含數字 0、1 的數共有 $8+64+192=264$ 。

7. 處理這樣的問題，我們應該先分類再應用加法原理：
I. 只用一種硬幣去組合 100 元有 3 種方法，即用 100 個 1 元或 50 個 2 元或 20 個 5 元；
II. 1 元和 2 元的組合：其中 2 元的個數可以從 1 枚到 49 枚均可，有 49 種方法；
III. 1 元和 5 元的組合：其中 5 元的從 1 枚到 19 枚均可，有 19 種方法；
IV. 2 元和 5 元的組合：其中 5 元的有 2、4、6、……、18 共 9 種方法；
V. 1、2、5 元的組合：因爲 $5=1+2\times2$，若果用 19 個 5 元組成 95 元，那麼最後 5 元的組合可以是 $1+2\times2=1\times3+2=5$，故此有 2 個可能。$10=2\times5=1\times2+2\times4$，以 18 個 5 元組成 90 元，最後的 10 元可以是 $1\times2+2\times4=1\times4+2\times3=1\times6+2\times2$ $=1\times8+2\times1=10$，有 4 個可能。$15=1+2\times7$，以 17 個 5 元組成 85 元，這樣最後的 15 元可以是 $1+2\times7=1\times3+2\times6=1\times5+2\times5=\ldots=1\times13+2\times1=15$，共有 7 種可能；我們會發現，除去 $n\times5$ 元以外，組成餘額 $(100-5n)$ 的可能組合恰好等於可以使用最多 2 元的個數！由於 $95=1+2\times47$，故此，以 1 個 5 元，餘下的 95 元用 1 元和 2 元組成的方法共有 47 個，所以用 1、2、5 元組成 100 元的方法共有 $2+4+7+9+12+14+17+19+22+24+27+29+32+34+37+39+42+44+47=461$ 種，



分類再相加：共有 $3+49+19+9+461=541$ 種方法。

8. 從這 6 個數中取出 2 個數寫成分數時，選分子或分母時會有 6 種選法，然後，決定了分子或分母後，再選 1 數，會有 5 種選法，根據乘法原理，這樣的分數有 $6\times5=30$ 個。
根據握手的例子，在這樣的分數中，真分數和假分數各佔一半，有 $\frac{6\times5}{2}=15$ 個。
在真分數中，$\frac{2}{4}$ 和 $\frac{3}{9}$ 都不是最簡分數，所以最簡分數應有 $15-2=13$ 。

9. 根據乘法原理，10 名運動員共賽 $\frac{10\times 9}{2}=45$ 場比賽，每場比賽最少賽 2 局，所以最少共賽 90 場比賽。每局比賽可出現的賽果為「0:11」、「1:11」⋯、「9:11」等 10 個可能，若果出現「deuce」，則可能的比分為「10:12」、「11:13」、「12:14」、「13:15」等 4 個可能。所以每局同分的情況最少有 $[\frac{90}{14}]+1=7$ 場。

10. 這是一條很有趣而且充滿「陷阱」的題目，除了要使用加法原理和和乘法原理外，還要很小心地處理2個給予的條件；一，不可經過南京；二，不准走重複的路線。這樣，有以下5個可能的路線：

I. 南京—香港—南京
從南京到香港有3種不同的走法，回程不准重複路線（也就是說，若果乘飛機從南京到香港，回程就不能乘飛機了；因此，可選擇的回程方法必須減少1種），只有2種走法，所以有 $3\times 2=6$ 種走法。

II. 南京—北京—香港—南京
從南京到北京有2種不同的走法，再到香港有2種不同的走法，最後返回南京有3種法，所以共有 $2\times 2\times 3=12$ 種不同的走法。

III. 南京—香港—北京—南京
這個情況與上相同，故有 $3\times 2\times 2=12$ 種不同的走法。

好了，上述3種是正常的情況。由於不走回頭路這條件容許了以下2種「不正常」的走法：

IV. 南京—北京—香港—北京—香港—南京
從南京到北京有2種走法，北京到香港也有2種走法，但再回北京，由於先前已選了火車或飛機，回程時不能選擇相同的走法，所以只得1種走法；同理，再由北京回南京也只有1種走法。所以共有 $2\times 2\times 1\times 1=4$ 種不同的走法。

V. 南京—香港—北京—香港—北京—南京
與上述相同的想法，共有 $3\times 2\times (2-1)\times (3-2)=12$ 種不同的走法。

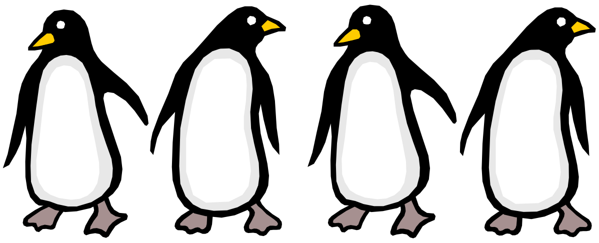
最後，共有 $6+12+12+4+12=46$ 種不同的走法。

11. 解決這條題目的關鍵，就是要設計出給當的鴿巢。因為每個同學只能從 8 名候選人中任選 2 人來投票，所以，選舉方法的數目就是鴿巢的數目了。為清楚地說明每個同學可能的選擇，將 8 名候選人名為 A、B、C、D、E、F、G、H，這樣，可能的結果如下：

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH
B	BA		BC	BD	BE	BF	BG	BH
C	CA	CB		CD	CE	CF	CG	CH
D	DA	DB	DC		DE	DF	DG	DH
E	EA	EB	EC	ED		EF	EG	EH
F	FA	FB	FC	FD	FE		FG	FH
G	GA	GB	GC	GD	GE	GF		GH
H	HA	HB	HC	HD	HE	HF	HG	

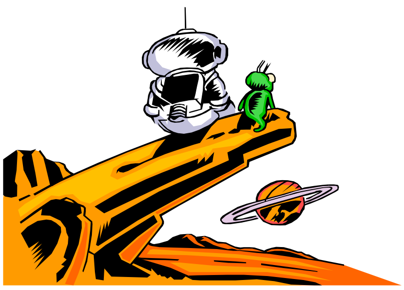
由於選擇「AB」與「BA」是一樣的，所以共有 $1+2+3+4+5+6+7=28$ 種可以的選擇。如果把 28 種不同的選擇看作 28 個鴿巢，那麼同一個鴿巢的同學所選的兩名候選人就會相同，按原理(I)，1A 班最少要有 $28+1=29$ 人。

12. 從最壞的情況去想，先取出紅、黃、藍、綠色的球各 1 個，然後一直取出綠色球，這樣，從第 5 個取出的球就能配成一對綠色球；但直到最後 1 個綠色被抽出卻仍只得一對同顏色的球。最後，第 11 個球被抽，不論是甚麼顏色也能組成第二對同顏色的球。所以，最少要取出 11 個球才能保證達到要求。



參考文獻

1. 李英哲主編(1995)。《新編小學數學應用題大全》六年級分冊。沈陽：沈陽出版社。
2. 師達主編（2003）。《新概念學科競賽完全設計奧賽急先鋒題庫》小學五年級數學。北京：中國少年兒童出版社。
3. 張君達主編(1992)。《北京數學奧林匹克小學材》，五年級試用 。北京：北京師範學院出版社。
4. http://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=%E9%B4%BF%E5%B7%A2%E5%8E%9F%E7%90%86&variant=zh-hk
5. http://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=%E4%BF%9D%E7%BD%97%C2%B7%E5%9F%83%E5%B0%94%E5%BE%B7%E4%BB%80&variant=zh-tw
6. http://zhidao.baidu.com/question/22689289.html
7. http://www.aoshu.com/sansi/daoyin4/2006-11-21/aoshu4786d830b1632.shtml
8. http://www.math15.com/mo/270.html
9. http://news.juren.com/200711/24960.html
10. http://www.608088.com/show-1505-1.html



顧問老師：梁志明、謝慧、黃萬安、黃偉智、楊振雄、袁仲強