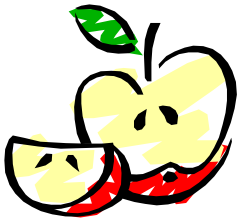
解難之趣

屯門區小學數學比賽專題特刊

第十八屆 二零零八年四月十九日

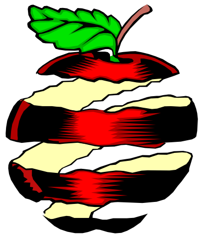
集合的定義



研習高等數學，不能不談集合(Set)（註[1]）。所謂一個集合，實在是可大可小的東西。例如，媽媽到市場買了一籃水果，內裡盛有蘋果3個、橙2個、西瓜1個。那麼，我們可以稱那個籃子爲一個集合，而內裡的蘋果、橙、西瓜就是這個集合的元素(element)。這個水果的集合共有6個元素。

另一個同學常見的例子，就是大家所屬的班別了。我們可以稱2A、2B……爲一個集合，班裡的每一位同學就是這個集合的元素。那末，班主任算不算這個集合的元素呢？而集合元素的數目又是多少呢？

談到集合裡元素的數目，眞是可大可小的啊！上述的生果集合，算是規模「細小」的了。看些龐然巨物吧！若果將本校的學生視爲一個集合，元素的數目就有約一千；若果視香港人口爲一個集合，元素的數目約有八百多萬；若果視中國人口爲一個集合，元素的數目就高達十三億了！還有些更大的集合嗎？地球的總人口？地球上昆蟲的總數？宇宙上星體的總數？其實，大家都認識一個比上述集合擁有更多元素的巨型集合——若果我們視自然數(Natural Numbers)爲一個集合，則它擁有的元素的數目就是無窮(infinity)了！在數學裡，無窮的記號——「∞」——像個倒臥了的8字一樣。



見識過巨大的集合後，同學或會問：「那麼最小集合又是甚麼呢？」——媽媽又從市場回來，今次買了甚麼水果呢？同學好奇一看籃子，啊！竟是空無一物！我們可以「當」那個空籃子爲最小的集合，它叫做空集(empty set)，它擁有元素的數目是0。不過，這個空籃子只是方便同學去理解空集定義的想像圖，眞正的空集是連那個空籃子也沒有的東西！眞的是空無一物。

註[1]：集合這個概念，最先由德國數學家康託(Georg Cantor, 1845-1918)提出。他提出有關無窮的理論，引發第三次數學危機的出現。

集合的記號

數學大量應用符號去代替文字敘述，就是要打破語言的障礙，增加它的流通性。集合也有它世界通行的記號，一般會用大括號{}去表示一個集，例如

(1)　{學生：田家炳中學的學生}就表示田家炳中學的學生這個集合。

(2)　{x: x is a natural number}就表示所有自然數的集合了。

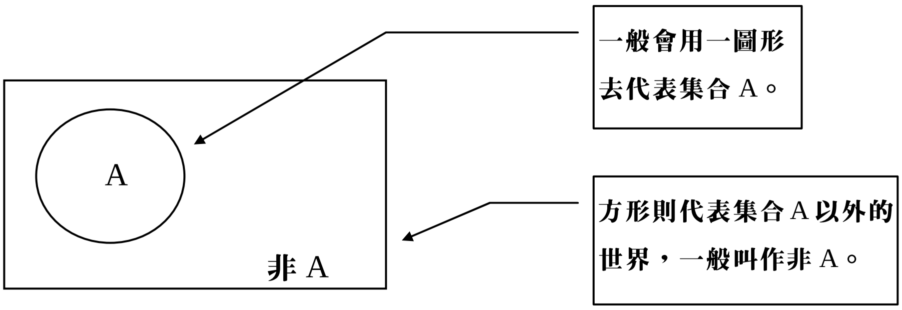
這類表示集合的方法，叫作**會意法**，方便表示一些擁有眾多元素的集合。另一種表示集合的方法叫做**窮舉法**，方便表示一些擁有元素較少的集合；不過，兩個表示法是相通的，例如

會 意 法		**窮 舉 法**
{x : x 是 16 的因數}	＝	{1, 2, 4, 8, 16}
{x : x 是少於 10 的質數}	＝	{2, 3, 5, 7}
{x : x 是自然數}	＝	{1, 2, 3, 4, ...}

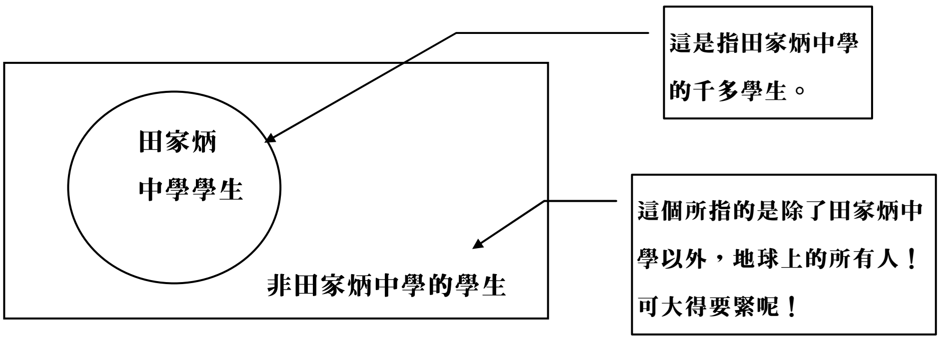
至於那種集合適合用那種表示法，原則一切以簡單爲佳！

集的圖象表示法

好些時候，圖象是表示概念的有效工具，它可以令抽象的概念變得清楚，變得實在和易於掌握。對集合這種抽象的數學概念，我們會用溫氏圖(Venn diagram)去表示：



例如，要表示田家炳中學學生這個集合，會如下圖表示：

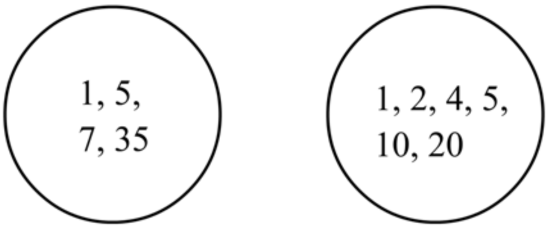


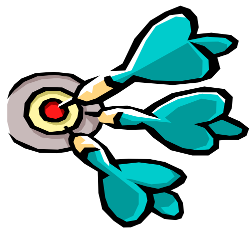
各同學要注意一點，在田家炳中學學生這個集以外，可以是任何東西；可以是田家炳中學的老師，可以是田家炳中學的校舍，甚至是某班房裡的垃圾桶！**<u>但絕不要認爲一定是別校的學生！</u>**總之除了本校的學生外，甚至可以是全宇宙所有的事物。

交集的定義

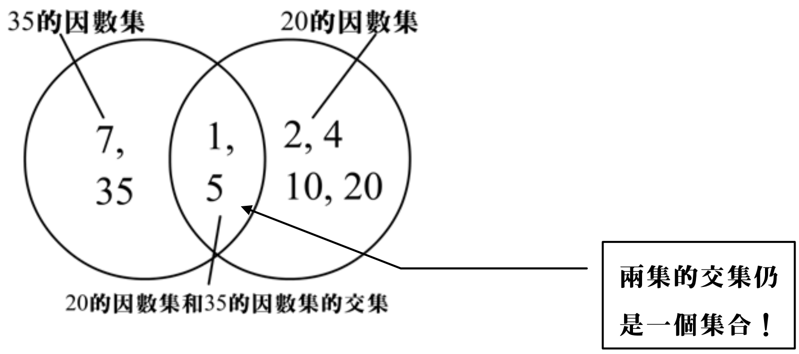
35 的因數所組成的集合是{1, 5, 7, 35}，而 20 的因數所組成的集合是{1, 2, 4, 5, 10, 20}六個數。

35 因數的集合　　　**20** 因數的集合



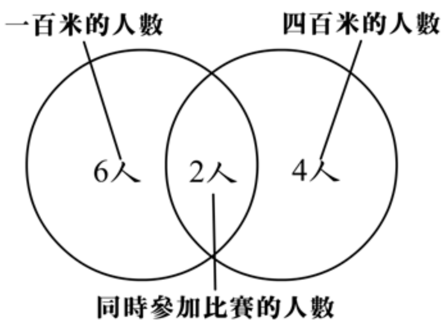


所謂交集(intersection)，就是指兩個集的公共部份，像 35 的因數集合和 20 的因數集合都有 1 和 5，因此，它們的交集就是包括 1 和 5 的集合。



例一： 中一甲班派出 12 名學生參加一百米和四百米比賽，現參加一百米的同學有 8 人，而參加四百米有 6 人，問同時參加兩項賽事的人數有多少？

解答：若參加一百米有 8 人，參加四百米有 6 人，那麼和便是 14 人，比總人數多了 2 人，而該 2 人則是同時參加兩項比賽，用集合表示如下：



容斥原理

「容」是指容納，或包含的意思；而「斥」是指排斥或排除的意思。因此，容斥原理就是指用包含、排除的意思來進行計算的一種方法。讓我們從以下例子去掌握這個原理。

例二：桌面上有邊長 4 厘米與邊長是 5 厘米的兩個正方形，而陰影部份是兩個正方形的重疊部份，試求兩個正方形覆蓋桌面的面積。

解答： 解決這問題，如只簡單地把兩個面積相加（即 $4\times4+5\times5=41$），就作爲其覆蓋桌面的面積，顯然是錯誤的，因爲陰影部份的面積被多算了一次。

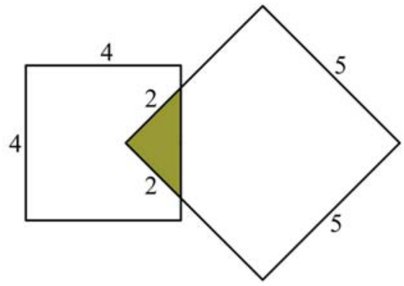
這個陰影部份是邊長爲 2 厘米的等腰直角三角形，

面積 $=\dfrac{2\times2}{2}=2$(平方厘米)。

所以必須要將這面積減除。

這樣，正確答案 $=4^2+5^2-2^2\div2$

$=39$(平方厘米)。

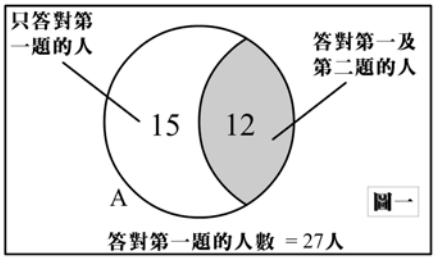


在計算兩正方形覆蓋桌面的面積時，所謂「容」，就是先將兩個正方形的面積相加起來，而「斥」就是指排除多算了一次的重覆部份。

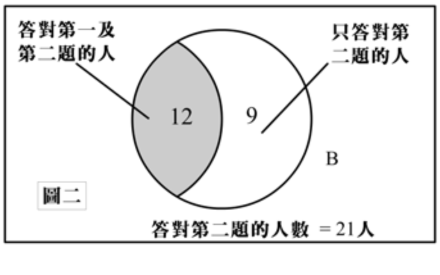
除了上述的簡單應用外，容斥原理還可處理一些較爲複雜的「數」數目問題。同學們遇上這些問題，不必被一堆一堆的數目弄得頭昏腦脹，只要先利用集合來表示各數目的關係，再應用容斥原理，問題就會迎刃而解。讓我們看看以下列子。

例三：中二乙班有 40 人參加測驗，答對第一題的有 30 人，答對第二題的有 21 人，兩題都答中的有 15 人，問兩題都没有答中的有幾人？

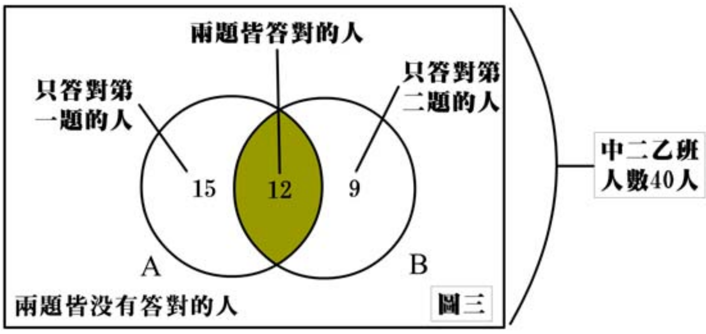
解答： 如圖一所示，集合 A 代表答對第一題的人，則集合 A 有 30 人，但其中有 15 人兩皆答對，故只答對第一題的人只有 $30-15=15$ 人。



如圖二所示，集合 B 代表答對的二題的人，因爲有 15 人兩題皆答對，所以只答對第二題的人有 $21-15=6$ 人。



兩圖合拼，現在仍有一個未知數，就是兩題皆不對的人的數目。



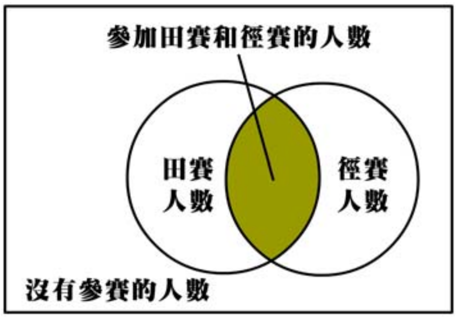
因此，兩題皆沒答對的人數

= 40 – 15 – 12 – 9

= 4 人

例四：中二丙班有學生 40 人，在一次陸運會中，參加田賽有 17 人，參加徑賽有 13 人，既參加田賽又徑賽則有 8 人，問沒有參賽有多少人？

解答：用集合來表示各類人數的關係，



由圖看出，

沒有參賽人數 ＝ 總人數 － 參賽的人數

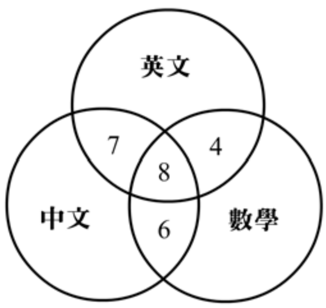
參賽的人數 ＝ 田賽人數 ＋ 徑賽的人數 － 同時參加田、徑賽的人數

∴ 參賽的人數 = 17+13 – 8(人)

沒有參賽人數 = 40 – 22

= 18(人)

例五：某班同學對中文、英文、數學三科中至少有一科感興趣，其中 30 人喜歡中文，32 人喜歡英文，21 人喜歡數學，既喜歡中文也喜歡英文有 15 人，既喜歡英文也喜歡數學有 12 人，既喜歡中文也喜歡數學則有 14 人，若三科都喜歡有 8 人，求全班的總人數？

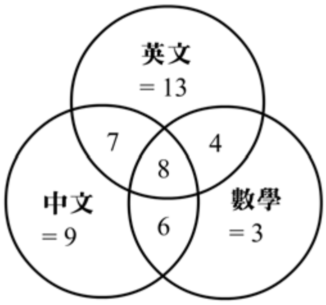


解答：若要簡單地解答以上的問題，集合和容斥原理可算是首選的方法：

從以上的資料，若三科都喜歡有 8 人，

則只喜歡中文和英文 = 15 – 8 = 7 人

只喜歡英文和數學 $= 12 - 8 = 4$ 人
只喜歡數學和中文 $= 14 - 8 = 6$ 人
因此，
只喜歡中文 $= 30 - 7 - 8 - 6 = 9$ 人
只喜歡英文 $= 32 - 7 - 8 - 4 = 13$ 人
只喜歡數學 $= 21 - 4 - 8 - 6 = 3$ 人
所以，全班的總人數 $= 9 + 13 + 3 + 6 + 8 + 4 + 7$
$= 50$(人)



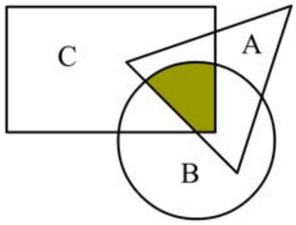
習題

1. 有 50 人參加游泳和參加跑步比賽，若參加游泳比賽的有 32 人，參加跑步賽的有 28 人，問兩項都參加有多少人？單參加游泳有多少人？單參加跑步有多少人？

2. 在 100 位中一同學中，會騎單車有 83 人，會游泳有 75 人，而兩項運動都不會則有 10 人，問兩項運動都會的有多少人？

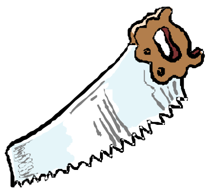
3. 在 1000 以內的所有自然數中，能被 5 或 7 整除的數有多少個？另，既不是 5 的倍數，也不是 7 的倍數又有多少個？

4. 如右圖所示，A、B、C 分別代表面積爲 8、9、11 的三張不同形狀的紙片，它們重疊放在一起蓋著的面積是 18，且 A 與 B，B 與 C，C 與 A 公共部份的面積分別是 5、4、3，求 A、B、C 三個圖形公共部分（陰影部分）的面積。

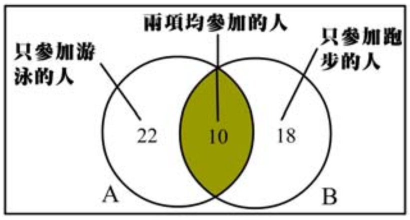


5. 某班學生共有 30 人，而班上有語文、數學、美術三個興趣小組。若參加語文和美術小組有 5 人，同時參加語文和數學有 5 人，數學和美術有 5 人，而三項活動均參加有 3 人，若參加語文、數學、美術三個小組分別各有 12 人，問沒有參加小組的同學有多少人？

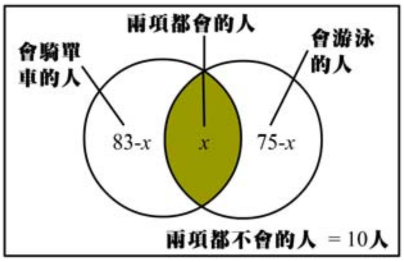
6. 在一根長木棍上，有三種刻度線，第一種刻度線將木棍分成 10 等份，第二種刻度線將木棍分成 12 等份，第三種刻度線將木棍分成 15 等份。如果沿每條刻度線將木棍鋸斷，木棍總共被鋸成了多少段？



答案



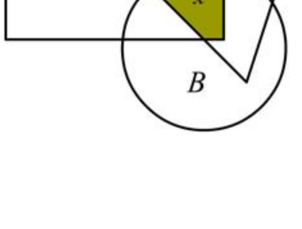
1. 由於每人最少都參加一項賽事，沒有人不參賽，將資料表成溫氏圖，馬上可以知道所求的答案：
兩項都參加的人數 $= 32 + 28 - 50$
$= 10$ 人
只參加游泳的人數 $= 32 - 10$
$= 22$ 人
只參加游泳的人數 $= 28 - 10$
$= 18$ 人



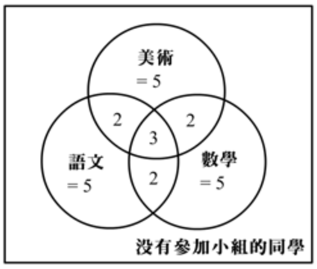
2. 首先，由於有 10 人是兩項運動都不會的，所以會其中一種運動的人數 = 90 人。現在假設兩項運動都會的人爲 x，則
只會騎單車的人數 $= 83 - x$
只會游泳　的人數 $= 75 - x$
$\therefore \quad (83 - x) + (75 - x) + x = 90$
$x = 68$ 人

3. 在 1000 以內，最後一個 5 的倍數是 1000，7 的倍數是 994，35 的倍數是 980。所以
5 的倍數的數目 $= \dfrac{1000}{5} = 200$ 個
7 的倍數的數目 $= \dfrac{994}{7} = 142$ 個
35 的倍數的數目 $= \dfrac{980}{35} = 28$ 個
我們只須在 5 和 7 的倍數的數目中扣除多數了一次的 35 的倍數的數目(它們的 L.C.M.)，即可知道能被 5 或 7 整除的數的數目
$= 200 + 142 - 28$
$= 314$ 個
$\therefore$ 既不是 5 又不是 7 的倍數的個數 $= 1000 - 314$
$= 686$ 個

4. 假設A、B、C三個圖形的共同部份的面積爲x，由於A、B，B、C，C、A公共部份的面積分別是5、4、3，而A、B、C三個圖形所蓋著的積爲18，則
$(8 + 9 + 11) - (5 + 4 + 3) + x = 18$
$x = 2$



5. 由於三項均有參加的人數 = 3 人，而參加其中兩項的人數 = 5 人，而參加語文、數學、美術三個小組分別各有 12 人，則，如右圖所示，



只參加一個組的人數 $= 12 - 3 - 2 - 2$

$= 5$ 人

∴ 沒有參加小組的同學數目

$= 30 - (5 + 5 + 5) - (2 + 2 + 2) - 3$

$= 6$ 人

6. 要計算木棍被鋸成多少段，只須計算出木棍上共有多少條不同的刻度線。首先，10、12、15的L.C.M.是60，所以不妨將木棍看成長60個單位。假設有60這個刻度，則木棍上的刻度線有以下三種：

I. $\{6, 12, 18, \ldots, 60\}$ （10條刻度線）

II. $\{5, 10, 15, \ldots, 60\}$ （12條刻度線）

III. $\{4, 8, 12, \ldots, 60\}$ （15條刻度線）

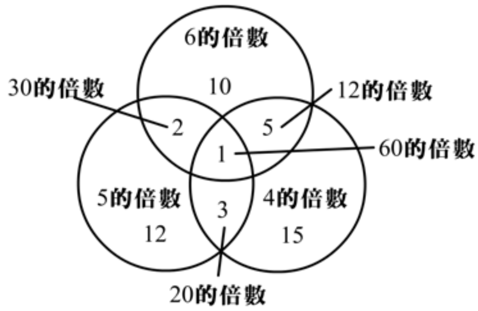
不過，各種刻度線有相互重疊的地方，由於6和5的L.C.M.是30，5和4的L.C.M.是20，4和6的L.C.M.是12，所以

第一、二種刻度線重疊的數目 $= \dfrac{60}{30} = 2$ 條

第二、三種刻度線重疊的數目 $= \dfrac{60}{20} = 3$ 條

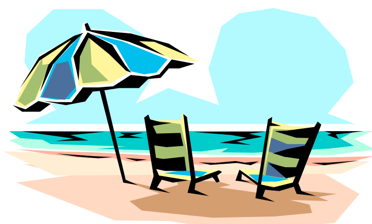
第三、一種刻度線重疊的數目 $= \dfrac{60}{12} = 5$ 條

三種刻度線重疊的數目 $= \dfrac{60}{60} = 1$ 條



∴ 木棍上刻度線的數目 $= 10 + 12 + 15 - (2 + 3 + 5) + 1$

$= 28$ 條



顧問老師：梁志明、黃萬安、黃偉智、楊振雄、袁仲強