

解難之趣

屯門區小學數學比賽特刊

第十四屆

二零零四年四月二十四日



推理問題

以下要介紹數學競賽中另一類大題目：推理題。這類題目看似跟數學毫無關係，除了「靠估」一道板斧外，根本了無他法。其實在這類「靠估」題目的背後，是蘊藏著有根有據的數學玄機的。



誠實的說慌

例一：在遠方有一條村，住著兩個民族，一個是誠實族，一個是說謊族。誠實族的人祇說真話，從不說假話；而說謊族的人祇說假話，不說真話。但如果不說話，從外表上是無法判斷出誰是說謊族、誰是誠實族。

有一天，小明剛到村裡，就遇到村民甲和乙。小明想向他們兩人問路，卻不知道他們到底是誠實族、還是說謊族？

小明問甲：「你是誠實族的嗎？」

甲哇哩哇哩（音：蛙咧）地回答了一句，小明沒有聽懂，他剛想再問，乙開口說：「他說：『是』，不過你別相信他，他在說謊。」不過，到底誰才是說假話的人呢？

解答：如果甲說實話，那麼他一定回答：「是」，因為誠實的人祇能說實話。

如果甲說假話，他的回答也是「是」。

這樣看來，乙說：「他說『是』」，就是實話。可見乙是誠實族人，他說甲是說謊族人也是真話。



從上述例題可以知道，解決這種「靠估」的推理題，首先要將資料整理，然後進行細心分析，找出解決問題的缺口，再以精密的邏輯推理，克服所有矛盾，問題當可迎刃而解。在日常生活中，有時會碰到一些「棘手」的問題，需要我們去認真思考，嚴格推理。讓我們再看一個例子。

小偷也作證

例二：黃先生的錢包在公共汽車上被人偷走了，從追查的結果來看，小偷是A、B、C、D四個人中的一人，他們對警察的問話是這樣回答的：

A說：「我認爲是B偷的。」

B說：「我明明看見是D偷的。」

C說：「別人的事我不管，反正我没有偷。」

D說：「別相信B的話，他和我有仇，他在陷害我。」

經過進一步的調查和周圍乘客的證明，終於抓住小偷，這小偷確實是他們四人中的一個，而且當時四人的回答，祇有一個人講了假話。究竟誰是小偷呢？

解答：既然四個人中祇有一個人說了假話，那麼我們從四個人的回答中，判別那個人說假話的可能性較大。我們先把四人的話簡化一下，即：



A說：「是B偷的。」

B說：「是D偷的。」

C說：「不是我偷的。」

D說：「B說謊。」

從四人的話中可以看出，B和D兩個人的話是矛盾的。那麼兩個人中必有一個人說真話，一個說假話。

假設D說假話，則B沒有撒謊，D確實是小偷，那麼B、C說真話，A卻說了假話，這與只有一人說假話條件不符合，假設錯誤。所以B祇能說假話，那麼其餘三人說的都是真話，也就是說，A說：「是B偷的」是真話！

可以斷定，錢包是B偷的。

註：這種解法的關鍵在於抓住四人回答中的矛盾之處，再根據所給條件，判斷誰是小偷。

另解：直接假設A、B、C、D分別是小偷，看看會產生甚麼情況。

假設A是小偷，那麼A、B在說謊，C、D說真話，與條件相矛盾。

假設C是小偷，那麼A、B、C均說謊，與條件不符合。

假設D是小偷，那麼A、D均說謊，而B、C都說真話，也與條件不符合。

祇有假設B是小偷，則B說假話，其餘人都說了真話，與條件相符合。所以B是小偷。



牛頓的編號？

例三：一天，一位老師讓五名學生來分辨五位科學家的畫像，老師把畫像從 1 到 5 編了號，讓各個學生說出其中任意兩位科學家的名字。

A 說：「2 號是牛頓，3 號是伽利略。」

B 說：「1 號是瓦特，2 號是愛因斯坦。」

C 說：「3 號是愛因斯坦，5 號是瓦特。」

D 說：「2 號是牛頓，4 號是哥白尼。」

E 說：「4 號是哥白尼，1 號是伽利略。」



老師聽後，發現每人都只說對了一半，問牛頓畫像的編號是多少？

解答：解這類題目，不妨使用「假設法」，在屢敗屢戰中取得正確的答案！

首先，假設 2 號是牛頓（由 A 和 D 的話），則伽利略不是 3 號（由 A 的話）、哥白尼不是 4 號（由 D 的話）。那麼，由 E 的話知伽利略是 1 號（題意指出每人都說對了一半），愛恩斯坦是 2 號——弊！矛盾出現，所以假設牛頓是 2 號的想法不能成立了。同學們不要氣餒，再接再勵！

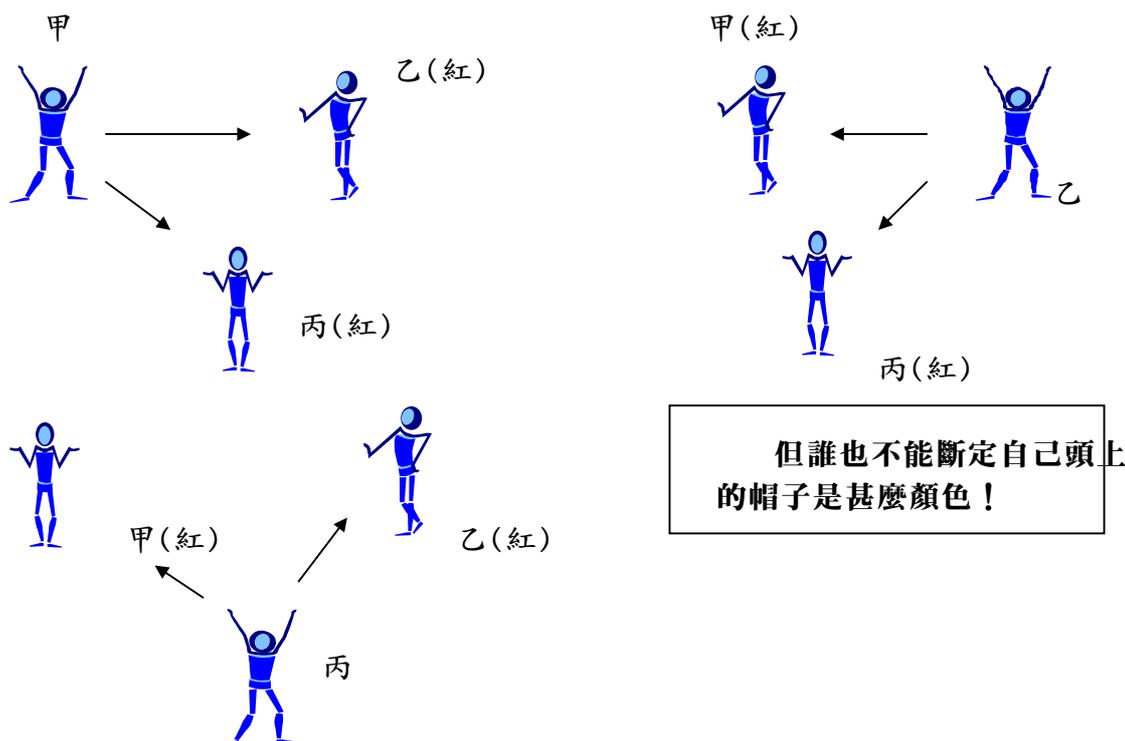
由上述的假設知道 2 號不是牛頓，那不妨假設 3 號是伽利略（由 A 的話）、4 號是哥白尼（由 D 的話），則由 C 的話知道 5 號是瓦特，由 B 的話知道 2 號是愛恩斯坦，最後，咱們就知道牛頓是 1 號了。

「猜帽子」題

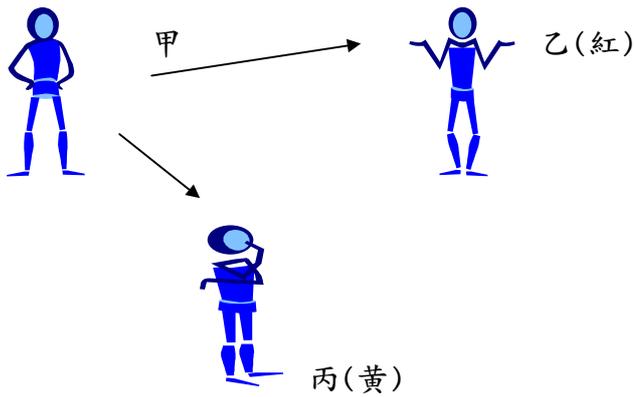
例四：甲、乙、丙三個人被蒙上眼睛，三人頭上都被戴了一頂帽，帽子的顏色不是紅的就是黃的。去掉蒙眼睛的布後，要求每個人如果看見別人（一個或兩個）戴紅帽子就舉手，並且誰能斷定自己頭上帽子的顏色，誰就馬上離開房間。

一開始，每個人都看見一個或兩個兩人頭戴紅色帽子，因此三個人都舉手。幾分鐘後，丙首先離開房間，問他是怎樣知道自己頭上帽子的顏色的。

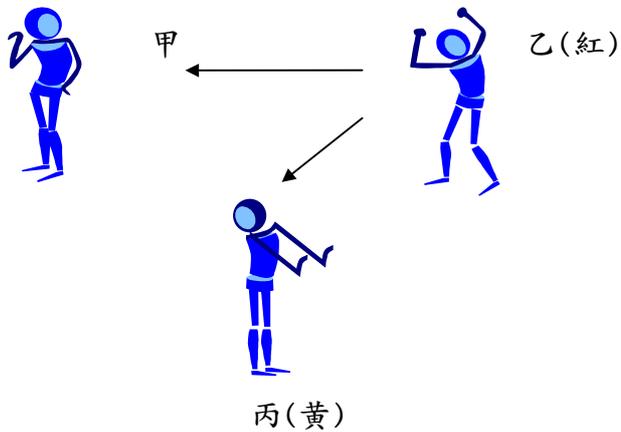
解答：由於每個人都看見一個或兩個人頭戴紅色帽子，因此三個人都舉了手，即：



丙這時想：假如自己戴的是黃色帽子，甲就會看到一紅一黃兩頂帽



根據「看見別人戴紅色帽子就舉手」的原則，甲就可以推斷出：「乙舉手，不會是給丙（黃色帽子）的一定是給自己舉手，說明甲戴的是紅色帽子。甲就會離開房間。同理，乙也會看到一紅一黃兩頂帽子，即：



根據甲的推理方法，乙也會知道自己頭戴紅色帽子而離開房間。但甲、乙兩人遲遲不離開房間，說明自己戴的不是黃色帽子，一定是紅色帽子。由以上分析推理，丙斷定自己戴的是紅色帽子，所以離開房間。



例五：A、B、C、D四班進行乒乓球、羽毛球、籃球和排球四項比賽。結果每個班都得了第一個第一，一個第二，一個第三，一個第四。已知：



- A班得了乒乓球冠軍；
 - B班得了羽毛球亞軍；
 - C班得了籃球第三；
 - D班有三個項目的名次都比C班低。
- 試列表排列四班在四項比賽中的名次。

解答：由上述資料得下列圖表：

	乒乓球	羽毛球	籃球	排球
A	1			
B		2		
C			3	
D				

要使D班三項成績低於C班，即D班有一項成績是高於C班，那麼祇有當C班的第四對D班的第一，然後C班的第一、第二、第三分別對D班的第二、第三、第四，即：

C：4 1 2 3

D：1 2 3 4

跟著有兩個假設：



假設（一）

	乒	羽	籃	排
A	1			
B		2		
C			3	4
D			4	1

已知D在籃球得第四，A在乒乓球得第一，要符合C第四，D第一的條件，考慮將C第四、D第一放在排球那一項（冠、亞、季、殿各一項）。

	乒	羽	籃	排
A	1			2
B		2		3
C	2	1	3	4
D	3	2	4	1

根據每人得冠、亞、季、殿各一次的條件，得左表結果。由於C的成績有三項高於D，故此，D在乒乓球只能得第三，在羽毛球只能得第二，出現矛盾！假設不成立。

↑
矛盾出現！



假設（二）

	乒	羽	籃	排
A	1			
B		2		
C		4	3	
D		1	4	

已知D在籃球得第四，A在乒乓球得第一，要符合C第四，D第一的條件，考慮將C第四、D第一放在羽毛球那一項（每項冠、亞、季、殿各一項）。

	乒	羽	籃	排
A	1	3	2	4
B	4	2	1	3
C	2	4	3	1
D	3	1	4	2

根據C有三項成績高於D，將C第二，D第三放在乒乓球一項，再將C第一，D第二放在排球一項，再由每人得冠、亞、季、殿各一次，得左列結果。若將C第一，D第二放在乒乓球，C第二，D第三將在排球，亦可得到合理的結果。所以解答多於一個。

習題

- 小明家的電話由6個數字組成。這6個數字互不相同，從左到右恰好是按由大至小的順序排列的，且任意兩個相鄰數字所組成的兩位數都能被3整除，試求小明家的電話號碼。



- 在某國裡，有君子和小人兩類居民，君子永遠說真話，小人永遠說假話。一次在街上遇見四個居民A、B、C、D，我們便問他們：「你們是甚麼人，是君子？還是小人？」

這四個人的回答如下：



A說：「我們四人全都是小人。」

B說：「我們之中祇有一個人是小人。」

C說：「我們四個人中有兩人是小人。」

D說：「我是君子。」

問D是君子嗎？

- 甲、乙、丙、丁與小強五位同學參加乒乓球比賽，每兩個人都要比賽一盤。到現在為止，甲已經賽了4盤，乙賽了3盤，丙賽了2盤，丁賽了1盤，問小強已經賽了幾盤？



4. 甲、乙、丙三個人，一個講真話，一個講假話，另外一個有時講真話，有時講假話。一天，小明遇到這三個人，他先問左邊的甲：「你旁邊的是哪一位？」甲回答說：「講真話的。」他又問中間的乙：「你是哪一位？」乙說：「我是說話半真半假的。」他最後問右邊的丙說：「你是哪一位？」丙說：「講假話的。」根據他們的回答，小明馬上分清了他們，你能分清嗎？
5. 一次數學比賽中，A、B、C、D、E五位同學取得了前五名，發獎後有人問他們的名次，問答是：
 A說：「B是第三名，C是第五名。」
 B說：「D是第二名，E是第四名。」
 C說：「A是第一名，E是第四名。」
 D說：「C是第一名，B是第二名。」
 E說：「D是第二名，A是第三名。」
 最後，他們都補充說：「我的話是半真半假的。」那麼，他們的名次到底是如何呢？
6. 趙、錢、孫、李四個人出差，住在同一間賓館。一天下午，他們分別要找一個地方去辦事。甲地方星期一不接待，乙地方星期二不接待，丙地方星期四不接待，丁地方只在星期一、三、五接待，星期日四個地方都不接待。
 趙：「兩天前，我去錯了一次，今天去一次，還可以與李同走一條路。」
 錢：「今天我一定得去，要不明天人家就不接待了。」
 孫：「這星期的前幾天和今天我去都能辦事。」
 李：「我今天和明天去，對方都接待。」
 請問這一天是星期幾？他們各自要去哪個地方辦事？



解答

1. 假設9先排，但，98、97都不是3的倍數，所以由8排起（若堅持用9先排，則跟著的數字必須是6，下一個數字就是3，沒數字再可排下去，6個字的電話號碼亦無法排出！），接著是7，跟著是5、4、2、1。所以小明家的電話號碼是875421。
2. 由A的回答可以判斷：
 (i) 四個人之中一定有君子（因為若四人全是小人，則誰也不會說：「我們四人全是小人。」這句話）所以A說了假話，他是小人。
 由B、C的回答可以判斷：
 (ii) B是小人（因為他若是君子，說實話，則B、C、D都是君子，但C的回答與他矛盾，兩人不可能同是一類人，故B說假話。）
 下面再看C的回答：
 若C是君子，則由(i)可知，D一定是君子；若C是君子，那麼由他的話可知D也是君子，因此無論C是君子抑或小人，都可以推D是君子。所以D是君子。



3. 因為甲賽了4盤，說明甲與乙、丙、丁和小強各賽了1盤，從這裡知道小強與甲賽了1盤。

因為丁賽了1盤，說明丁肯定是與甲比賽的。

因為乙賽了3盤，說明除了丁以外，乙只能與甲、丙、小強各賽了1盤，從這裡知道小強與乙賽了1盤。

現在知道丙賽的2盤是與甲、乙各賽一盤。

所以小強賽了2盤。



4. 我們先假設甲講的是真話，那麼乙應該是講真話的，但這與他的回答：「我是說話半真半假的」矛盾，所以甲講真話這一假設不對。那麼甲講的就是假話了。既然甲是說假話的，那乙就不是說真話的了，因此，丙一定就是說真話的。根據丙的話，乙是說假話的，剩下甲就是說話半真半假的了！

5. 先簡化一下記法。比如說B是第三名，則寫成B3，如此類推。這樣五個人的講話可簡記為（按A、B、C、D、E的順序）：

(i) A說：B3，C5；

(ii) B說：D2，E4；

(iii) C說：A1，E4；

(iv) D說：B2，C1；

(v) E說：A3，D2。

假設(i)的前半句是真的，即B3，則(iv)的B2不成立，只能C1。由(iii)知道A1不對，則只能E4，再由(ii)知D2不對，最後從(v)得出A3，這與先前假設B3矛盾，故假設不成立。

因此，(i)的後半句才是真的，即C5，然後由(iv)得B2，由(ii)得E4，由(v)得A3，最後知道D1。

∴名次順序應為D第一，B第二，A第三，E第四，C第五。

6. 由孫的講話，知道這一天是星期三，孫要去丙地方。錢要去丁地方。趙去甲地方。李去乙地方。



顧問老師：梁志明、黃萬安、黃偉智、楊振雄、袁仲強