

解難之趣

屯門區小學數學比賽特刊

第十三屆

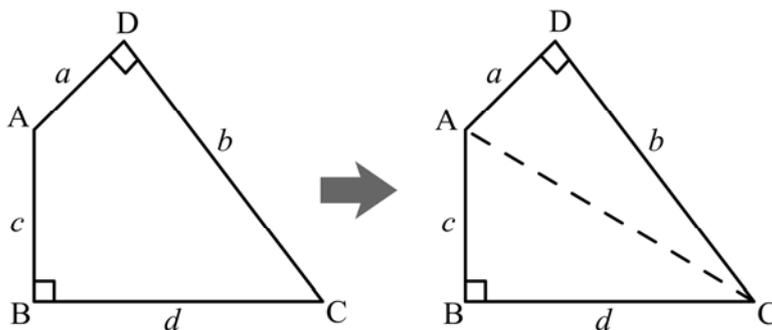
二零零二年四月二十六日



面積問題

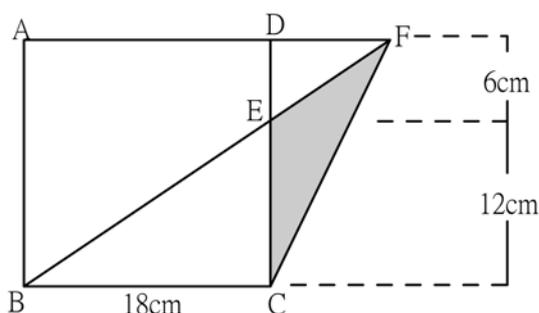
計算平面圖形的面積，我們可以借助圖形本身的特徵，或對圖形進行恰當的變形，如添加一些輔助線（圖一），從而構成具有某種特徵的圖形（即利用輔助線把圖形割成可應用公式計算面積的圖形）。在此基礎上，靈活運用所學的幾何初步知識，進行分析推理，再尋求解題途徑。

圖一：



讓我們先看看三角形、正方形、長方形、平行四邊形等圖形的面積計算：

例一：下圖中ABCD為邊長18厘米的正方形。已知CE的長度是ED的2倍。求三角形CEF的面積及DF的長度。



解答：首先，我們知道 $CE = 12\text{cm}$ ， $ED = 6\text{cm}$ 。

$$\begin{aligned}\text{步驟(1) } \triangle BCF \text{ 的面積} &= \frac{1}{2}(BC)(CD) \\ &= \frac{1}{2}(18)(18) \\ &= 162\text{cm}^2\end{aligned}$$



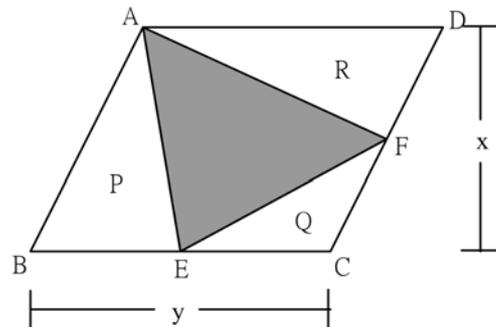
$$\begin{aligned} \text{步驟(2) } \Delta BCE \text{ 的面積} &= \frac{1}{2}(BC)(CE) \\ &= \frac{1}{2}(18)(12) \\ &= 108\text{cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \Delta CEF \text{ 的面積} &= \Delta BCF \text{ 的面積} - \Delta BCE \text{ 的面積} \\ &= 162 - 108 \\ &= 54\text{cm}^2 \end{aligned}$$

步驟(3) 現在把DF看為 ΔCEF 的高，底為CE，則

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(12)(DF) &= 54 \\ \therefore DF &= 9\text{cm} \end{aligned}$$

例二：已知平行四邊形的面積是 128cm^2 ，E、F 分別是兩邊上的中點，求陰影部份的面積。



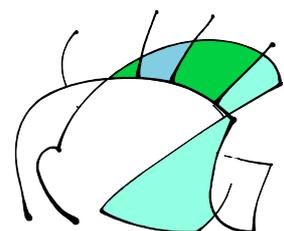
解答：為了方便敘述，把平行四邊形內的三角形記作 P、Q、R。假設底邊是 y ，高是 x 。則平行四邊形的面積就是

$$xy = 128\text{cm}^2 \dots\dots (*)$$

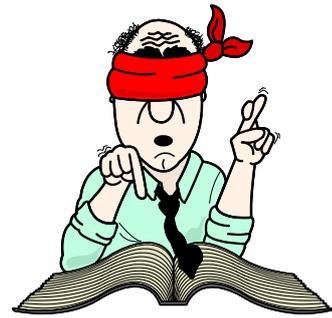
$$\begin{aligned} \Delta P \text{ 的面積} &= \frac{1}{2}(x)(BE) \\ &= \frac{1}{2}(x)\left(\frac{1}{2}BC\right) \quad (\because E \text{ 是 } BC \text{ 的中點}) \\ &= \frac{1}{4}xy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta R \text{ 的面積} &= \frac{1}{2}(y)\left(\frac{1}{2}x\right) \quad (\because F \text{ 是 } DC \text{ 的中點}) \\ &= \frac{1}{4}xy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{同理，} \Delta Q \text{ 的面積} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x\right)\left(\frac{1}{2}y\right) \\ &= \frac{1}{8}xy \end{aligned}$$

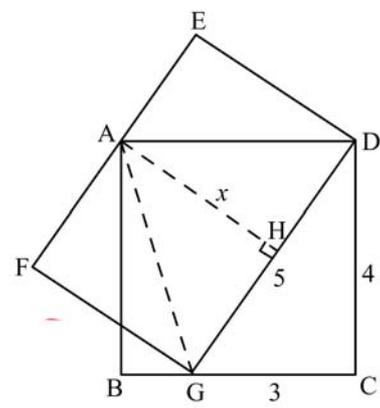
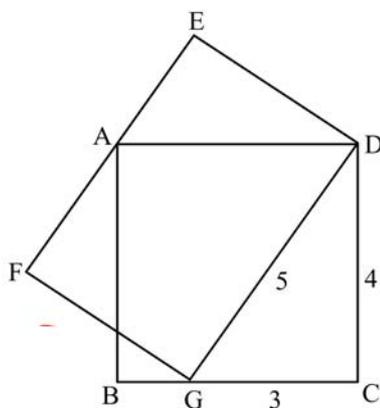


$$\begin{aligned}
 \therefore \Delta P + \Delta Q + \Delta R &= \frac{1}{4}xy + \frac{1}{4}xy + \frac{1}{8}xy \\
 &= \frac{5}{8}xy \\
 \therefore \text{陰影部份面積} &= xy - \frac{5}{8}xy \\
 &= \frac{3}{8}xy \\
 &= \frac{3}{8}(128) \quad [\text{由(*)}] \\
 &= 48\text{cm}^2
 \end{aligned}$$



註：在解答上述例題時，我們應用了分割圖形的技巧。本來， ΔAEF 是無法利用公式計算面積的，但是透過將圖形分割，先計算一些可用公式計算的圖形的面積，再和平行四邊形面積相減，就得出 ΔAEF 的面積了。這個技巧，是計算較複雜面積問題常用的「必殺技」。

例三：如圖所示，正方形 $ABCD$ 的邊長是 4cm ， $CG = 3\text{cm}$ 。長方形 $DEFG$ 的長是 5cm ，求長方形的闊度。



解答：先加 2 條輔助線 AG 及 AH ，以形成 ΔAGD ，而 $AH = x$ 則為 ΔAGD 的高度，亦即長方形的闊度。

先求 ΔAGD 的面積，以下有 2 個不同的方法：

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \Delta AGD \text{ 的面積} &= \frac{1}{2}(GD)(AH) \\
 &= \frac{1}{2}(5)(x) \\
 &= 2.5x
 \end{aligned}$$



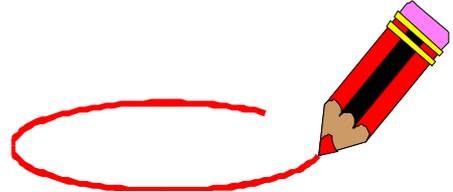
$$\begin{aligned}
 (2) \quad \Delta AGD \text{ 的面積} &= \text{正方形面積} - \Delta ABG \text{ 的面積} - \Delta DCG \text{ 的面積} \\
 &= AB^2 - \frac{1}{2}(BC)(AG) - \frac{1}{2}(GC)(CD) \\
 &= (4)^2 - \frac{1}{2}(4)(1) - \frac{1}{2}(3)(4) \\
 &= 16 - 2 - 6 \\
 &= 8\text{cm}^2
 \end{aligned}$$

∴ 由(1) = (2)得

$$2.5x = 8$$

$$x = 3.2\text{cm}$$

即長方形的寬為 3.2cm。



註：解這條題目時，並不是直接計出長方形的寬，而是間接地利用計三角形的面積，再求出所需的答案。

看過與三角形、正方形、長方形有關的面積問題後，讓我們看看有關圓形的面積問題吧！

以下公式常用於計算有關圓形的面積

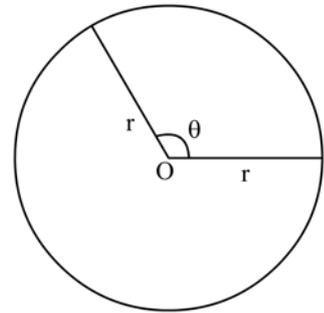
(詳見於課本第 9 章)：

$$\text{圓面積} = \pi r^2$$

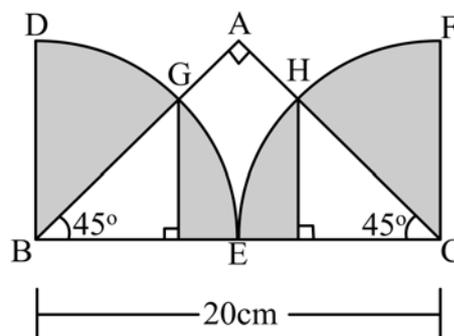
$$\text{扇形面積} = \frac{\theta}{360^\circ}(\pi r^2)$$

其中 r 為圖形的半徑， θ 為扇形角，

而 π 是一個常數，一般取近似值 3.14 或 $\frac{22}{7}$ 。



例四：已知 ΔABC 為一等腰直角三角形，其中 B 及 C 分別為兩個相同大小的象限（四份之一圓）DBE 及 ECF 的圓心。求陰影部份的面積（其中 $\pi = 3.14$ ）。



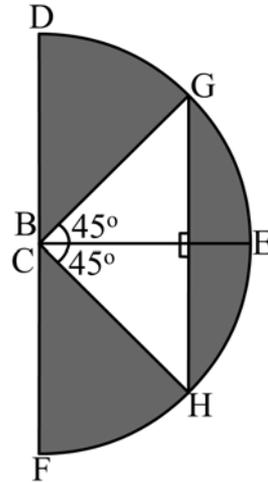
解答：這題目有兩個方法找出面積。

方法一：

別要被複雜的圖形令自己產生錯覺，以為這條題目很難。我們把上圖的 2 個 $\frac{1}{4}$ 圓

拼成一個半圓，那麼，便形成一個等腰三角形 CHG，

其中圓半徑 = CG = CH = 10cm。



∴ 陰影部份面積 = 半圓 DFE 的面積 - Δ CHG 的面積

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\pi(CG)^2 - \frac{1}{2}(CG)(CH) \\ &= \frac{1}{2}(3.14)(10)^2 - \frac{1}{2}(10)(10) \\ &= 157 - 50 \\ &= 107\text{cm}^2 \end{aligned}$$

方法二：

利用三角函數（詳見課本第 6 章）求出 CI、GI 的長度。

記 CI = y，GI = x。則我們有

$$\sin 45^\circ = \frac{x}{10}$$

$$x = 10\sin 45^\circ \dots\dots (1)$$

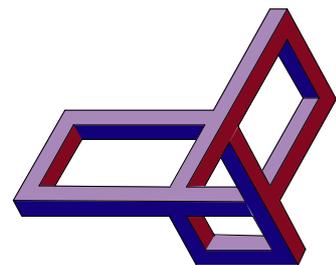
$$\cos 45^\circ = \frac{y}{10}$$

$$y = 10\cos 45^\circ \dots\dots (2)$$

$$\therefore \Delta \text{CGI 的面積} = \frac{1}{2}xy$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(10\cos 45^\circ)(10\sin 45^\circ) \\ &= 25\text{cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{陰影部份面積} &= \frac{1}{2}(3.14)(10)^2 - (2)(25) \\ &= 107\text{cm}^2 \end{aligned}$$



例五：已知圖中陰影部份面積是 8cm^2 ，求圖中大圓的面積。

解答：解這條問題的關鍵在於大圓的半徑剛好是小圓的直徑。因此，只要求出扇形 ABC 及半圓形 AEC 的面積，它們的差就是陰影部份的面積了。

假設大圓半徑 $AB = AC = R$ ，則小圓半徑 $AD = DC = \frac{R}{2}$ 。

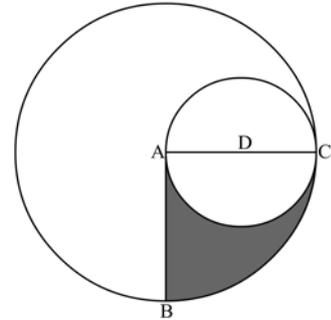
由於陰影部份的面積 = $\frac{1}{4}$ 大圓面積 - $\frac{1}{2}$ 小圓面積

$$\therefore \frac{1}{4}\pi R^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 = 8$$

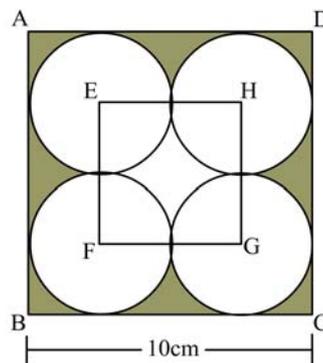
$$\frac{\pi R^2}{8} = 8$$

$$\pi R^2 = 64$$

即大圓的面積為 64cm^2 。



例六：如圖所示，以小正方形 EFGH 四角的頂點為圓心，邊長的一半作 4 個圓，在 4 個圓外作邊長 10cm 的正方形 ABCD，每邊都與其中 2 圓各有一個接觸點，求陰影部份的面積（取 $\pi = 3.14$ ）？



解答：已知 $FG = \frac{1}{2}BC = 5\text{cm}$ ，所以圓形的半徑 = 2.5cm 。

驟看此圖，同學或會被那圖形「誤」導，以為這是條複雜的問題。但大家只要細心一想，以 E、F、G、H 為中心的扇形都是 $\frac{1}{4}$ 圓，拼起來剛好是一個圓形，所以

我們扣去 3 個圓形的面積後，就會剩下正方形 EFGH，即以下式子：

陰影部份面積 = ABCD 的面積 - EFGH 的面積 - 3 × 圓形面積

$$= (10)^2 - (5)^2 - 3\pi(2.5)^2$$

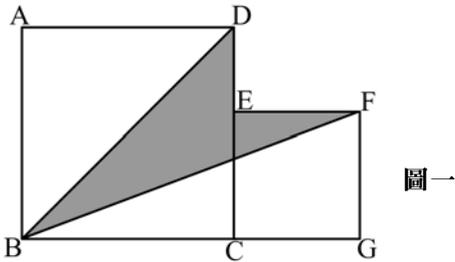
$$= 16.125\text{cm}^2$$

（本題解答由 2C(94)班梁美紅同學提供）

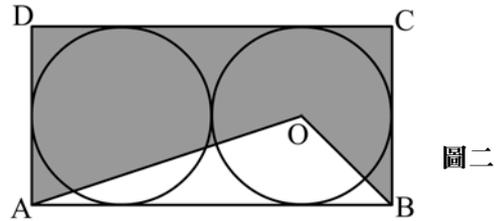


習題

1. 已知大正方形 ABCD 邊長是 5cm，小正方形 DEFG 的邊長是 3cm (圖一)，求陰影部份的面積。

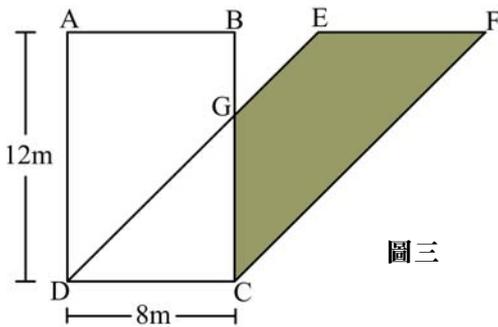


圖一

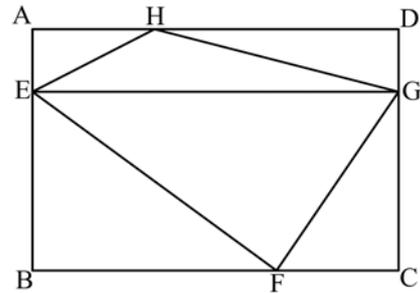


圖二

2. 如圖二，圓的直徑是 5cm，求陰影部份面積。
3. 已知陰影份的面積是 64m^2 (圖三)，求 BG 的長度。

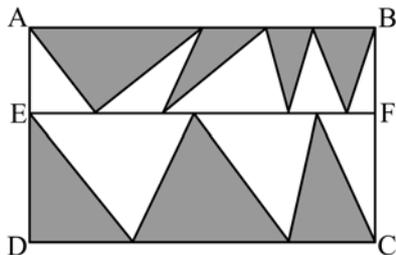


圖三



圖四

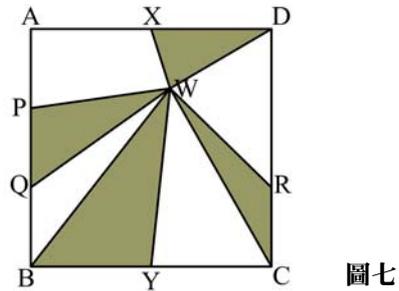
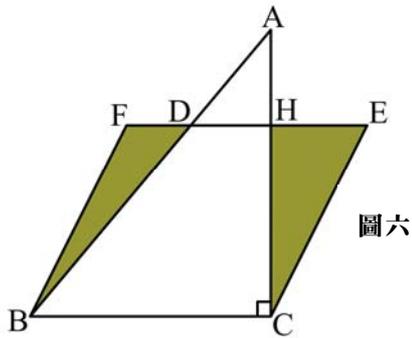
4. 圖四中，長方形 ABCD 被一線段 EF 分成 2 個長方形，其中較大長方形的寬是較小長方形的寬的 3 倍， $\triangle EHF$ 的面積比 $\triangle EGF$ 的面積大 7cm^2 ，求長方形 ABCD 的面積。
5. 如圖五所示，ABCD 和 CDEF 都是長方形，AB 的長為 6cm，AD 的長為 4cm。那麼，圖中的陰影部份的面積是多少？



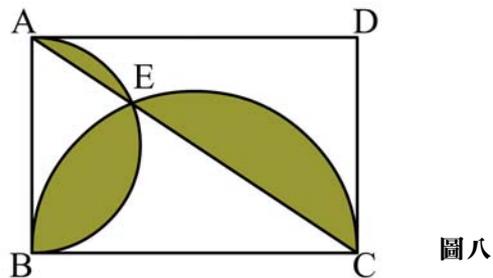
圖五



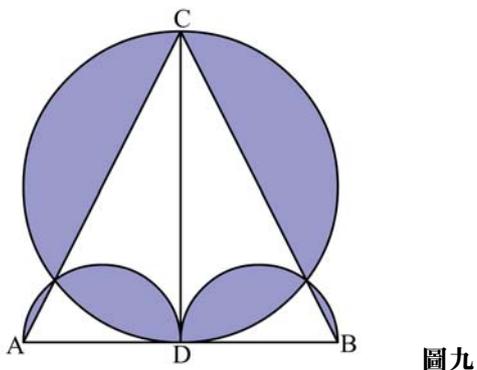
6. 如圖六所示，BCEF 是平行四邊形，ABCD 是直角三角形。BC 長 10cm，AC 長 7cm，陰影部份面積比 $\triangle ADH$ 的面積大 12 cm^2 ，求 HC 的長度。



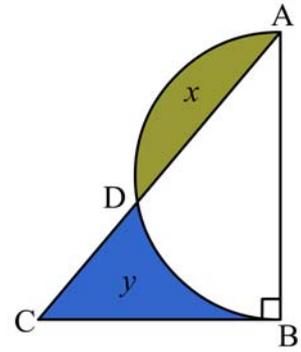
7. 圖七所示，正方形邊長是 6cm，A、D 是所在邊上二分點，B、C、E、F 分別是所在線上的三分點，求陰影部份的面積。
8. 圖八中，ABCD 為一長方形，其中 $AB = 6\text{ cm}$ ， $BC = 8\text{ cm}$ 。求陰影部份面積。（取 $\pi = 3.14$ ）。



9. 等腰三角形 ABC 的底和高都是 8cm，D 為 AB 的中點。以高為直徑作圓，再分別以 AD 及 DB 為直徑作兩半圓（如圖九所示），求陰影部份面積。（取 $\pi = 3.14$ ）

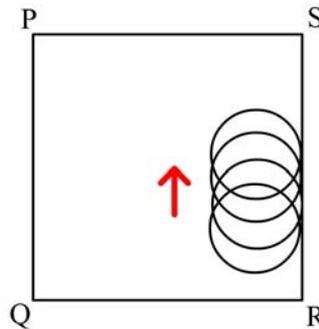


10. 圖十中陰影部份 X 的面積比陰影部份 Y 的面積大 28cm^2 ， $\triangle ABC$ 為一直角三角形，其中 AB 長 14cm 。求 BC 的長度（取 $\pi = \frac{22}{7}$ ）。



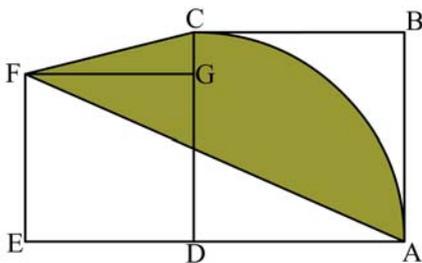
圖十

11. 一個正方形的邊長為 35cm ，內有一個半徑為 7cm 的圓片（如圖十一），圓片緊貼正方形內壁運動，求它掃過的面積是多少（取 $\pi = \frac{22}{7}$ ）？



圖十一

12. 圖十二已知 ABCD 及 DEFG 分別為邊長 12cm 及 10cm 的正方形，求陰影部份的面積。（取 $\pi = 3.14$ ）



圖十二

解答

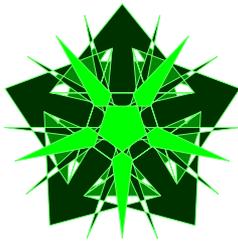
1. 陰影部份面積 = $ABCD + EFGH - \triangle ABC - \triangle CGF$
 $= AB^2 + FG^2 - \frac{1}{2}(AB)(BC) - \frac{1}{2}(CG)(GF)$
 $= (5)^2 + (3)^2 - \frac{1}{2}(5)(5) - \frac{1}{2}(8)(3)$
 $= 9.5\text{cm}^2$



2. 已知 $AD = BC = 5\text{cm}$ ， $AB = CD = 10\text{cm}$ 。則陰影部份面積
 $=$ 長方形 $ABCD$ 面積 $- \triangle ABO$ 面積
 $= 5 \times 10 - \frac{1}{2}(2.5)(10)$
 $= 37.5 \text{ cm}^2$

註：各同學別要被圖中的圓形影響，以為要計陰影部份面積，就要計算圓面積。其實，只要加些輔助線，把圖形割開，就可以得到一些可用公式計算面積的圖形。

3. 設 $BG = x\text{cm}$ ，則 $CG = (12 - x)\text{cm}$ 。由陰影部份面積為 64m^2 ，得



$$(12)(8) - \frac{1}{2}(8)(12 - x) = 64$$

$$96 - 4(12 - x) = 64$$

$$4x = 16$$

$$x = 4$$

4. 設 $AE = x\text{cm}$ ，則 $EB = 3x\text{cm}$ ；另設 $EF = y\text{cm}$ ，則長方形 $ABCD$ 的面積 $= 4xy\text{cm}^2$ 。
 $\therefore \triangle EHF$ 面積 $- \triangle EGF$ 面積 $= 7$
 $\therefore \frac{1}{2}(3x)(y) - \frac{1}{2}(x)(y) = 7$
 $\therefore xy = 7$
 \therefore 長方形 $ABCD$ 的面積 $= 28\text{cm}^2$

5. 此題根本毋須逐一去計算每個三角形的面積，因為在長方形 $AEFB$ 中，所有劃有陰影的三角形的底邊長度的和正好是 AB ，而高則全都是 AE 。所以在長方形 $AEFB$ 中，

$$\begin{aligned} \text{陰影部份面積} &= \frac{1}{2}(AB)(AE) + \frac{1}{2}(CD)(ED) \\ &= \frac{1}{2}(AB)(AE + ED) \quad (\because AB = CD) \\ &= \frac{1}{2}(AB)(AD) \\ &= \frac{1}{2}(6)(4) \\ &= 12\text{cm}^2 \end{aligned}$$

(本題解答由 2C(94)班梁美紅同學提供)

6. 由圖六可知 HC 就是平行四邊形的高度，我們有下式：
 平行四邊形面積 $- \triangle ABC$ 面積 $=$ 陰影部份面積 $- \triangle ADH$ 面積

$$(BC)(HC) - \frac{1}{2}(BC)(AC) = 12$$

$$10HC - \frac{1}{2}(10)(7) = 12$$

$$10HC = 47$$

$$HC = 4.7\text{cm}$$

(本題解答由 2C(94)班梁美紅同學提供)



7. 作 h_1 、 h_2 、 h_3 、 h_4 分別為 $\triangle WBY$ 、 $\triangle WCR$ 、 $\triangle WDX$ 、 $\triangle WPQ$ 的高，且 $h_1 + h_3 = h_2 + h_4 = 6$ ，則陰影部份面積

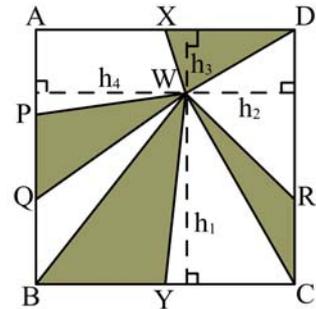
$$= \frac{1}{2}(BY)(h_1) + \frac{1}{2}(CR)(h_2) + \frac{1}{2}(XD)(h_3) + \frac{1}{2}(PQ)(h_4)$$

$$= \frac{1}{2}(3)(h_1) + \frac{1}{2}(2)(h_2) + \frac{1}{2}(3)(h_3) + \frac{1}{2}(2)(h_4)$$

$$= \frac{1}{2}(3)(h_1 + h_3) + \frac{1}{2}(2)(h_2 + h_4)$$

$$= \frac{1}{2}(3)(6) + \frac{1}{2}(2)(6)$$

$$= 15\text{cm}^2$$



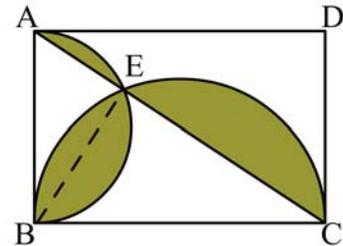
8. 連結直線 BE，我們可以發現， $\triangle ABC$ 被分成 2 個三角形： $\triangle AEB$ 及 $\triangle BEC$ ，而陰影部份面積

$$= \text{半圓 AEB} - \triangle AEB + \text{半圓 BEC} - \triangle BEC$$

$$= \text{半圓 AEB} + \text{半圓 BEC} - \triangle ABC$$

$$= \frac{1}{2}(\pi)(3)^2 + \frac{1}{2}(\pi)(4)^2 - \frac{1}{2}(6)(8)$$

$$= 15.25\text{cm}^2$$



9. 依題意可知大圓直徑 $CD = 8\text{cm}$ ，小半圓直徑 $AD = DB = 4\text{cm}$ 。陰影部份面積

$$= \text{大圓面積} - \triangle ABC \text{ 面積} + 2(\text{小半圓面積})$$

$$= (3.14)(4)^2 - \frac{1}{2}(8)(8) + 2(\frac{1}{2})(3.14)(2)^2$$

$$= 30.8\text{cm}^2$$

10. 跟題 6 一樣，半圓與三角形的面積差，就是陰影部份 x 與 y 的差了。

$$\therefore \text{陰影部份 } x \text{ 的面積} - \text{陰影部份 } y \text{ 的面積} = 28$$

$$\therefore \text{半圓 ABD 面積} - \triangle ABC \text{ 面積} = 28$$

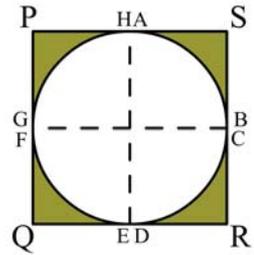
$$\frac{1}{2}(\frac{22}{7})(7)^2 - \frac{1}{2}(14)(BC) = 28$$

$$7BC = 49$$

$$BC = 7\text{cm}$$



11. 從右圖可知，圓片緊貼正方形內壁走一圈後，可得一條環形路徑。其中扇形 AIB、CJD、EKF、GLH 均為半徑 7cm 的 $\frac{1}{4}$ 圓，



合起來剛是一整個圓形。所以 4 個角的陰影部份面積

$$= \text{正方形 PQRS 面積} - \text{圓片面積}$$

$$= (14)^2 - \frac{22}{7}(7)^2$$

$$= 42\text{cm}^2$$

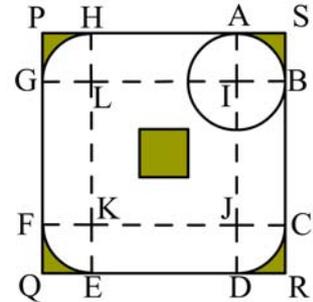
因此圓片所掃過的面積

$$= \text{正方形面積 PQRS} - \text{陰影部份面積}$$

$$= (35)^2 - 42 - (7)^2 \quad (\text{中央小正方形})$$

$$= 1134\text{cm}^2$$

(本題解答由 2C(94)班李家偉同學提供)



12. 解這題目，我們得將陰影部份面積分為份： $\triangle CFG$ 及圖形 AFGC。計算 AFGC 的面積，我們不能直接地利用公式去計算，只好利用正方形與其它圖形的差去做，首先計算圖形 ABC 的面積。

$$\text{ABC 面積} = (12)^2 - \frac{1}{4}(3.14)(12)^2$$

$$= 30.96\text{cm}^2$$

$$\text{陰影部份面積} = \text{正方形 ABCD 面積} + \text{正方形 DEFG 面積} - \triangle AEF \text{ 面積}$$

$$- \text{ABC 面積} + \triangle CFG \text{ 面積}$$

$$= (12)^2 + (10)^2 - \frac{1}{2}(12+10)(10) - 30.96 + \frac{1}{2}(12-10)(10)$$

$$= 113.04 \text{ cm}^2$$



顧問老師：梁志明、黃萬安、黃偉智、楊振雄、袁仲強

工作人員：梁美紅

仁愛堂田家炳中學數學組