解難之趣

屯門區小學數學比賽特列刊

第十一屆　　　　　　　　　　　　　　　　　　二零零零年五月四日

速算

速算？甚麼是速算呢？不用計算機，甚至連筆、紙都不用，光憑心算，能夠很快算出 1234×567 的積，就是我們要討論的「速算法」嗎？不！在日常生活中，我們很少會遇上它，要是真的遇上，還不如「速速」拿起計算機去「算算」吧！不過，在日常生活中，我們卻常遇到以下的情況：

一天，小明跟朋友到餐室吃東西，侍應忙碌好一陣子，一一為他們「落單」後，留下如右的記賬單。小明想算一算總數，但——該如何算才會快而準呢？

田記茶餐廳 照單付賬　多謝合作	
早　A	17
凍茶　波蘿包	14
早　B	18
熱啡　旦撻2	14
腿治　熱啡	18
特	16
早　C	18
熱啡　旦撻	11
No. 7811　　總計 多謝光顧	？？？

$17 + 14 + 18 + 14 + 18 + 16 + 18 + 11 = ?$

答案不難算出來，不過，就這樣「從左到右」的加起來？是不是快而準的呢？

當我們遇到以上的題目時，很少會有計算機之類的工具在手，而且用計算機也不一定是最快的！這時，我們需要一些計算的「小技術」——速算法。

$$\begin{aligned}&17 + 14 + 18 + 14 + 18 + 16 + 18 + 11\\&= 18\times3+16+14\times2+17+11\\&= 54 + 16 + 28 + 28\\&= \boxed{70 + 56} \quad \text{（可略去）}\\&= 126\end{aligned}$$

轉「加」為「乘」，再把分為小組的數加起來、湊合成零字尾的數，是速算法中的常用技術。不過，還有更快的方法嗎？

若果同學的「心算」有一定的水平的話，或者會有以下的計算：

$$\begin{aligned}&17 + 14 + 18 + 14 + 18 + 16 + 18 + 11\\&= (17 + 18) + (14 + 11) + (14 + 16) + (18 + 18)\\&= 35 + 25 + 30 + 36\\&= \boxed{60 + 30 + 36} \quad \text{（可略去）}\\&= 126\end{aligned}$$

適當地把加法順序重組，湊成更多零字尾的數，算起來當然會快而準了。

當然，同學或會發現，要應用速算的技術，基本的四則運算也要達到一定水平，要是不能察覺 17 + 18 = 35，**再配合** 14 + 11 = 25，**然後** 35 + 25 **可湊成整數** 60 **的話，那我們就沒所謂速算的餘地了；還是快快去溫習小學的四則運算吧！**

所以，要討論速算的技術前，我們得重溫一下進行四則運算應該注意的地方。

四則運算

（一） **掌握運算順序**

(1) **在沒有括號的算式裡，如果只有加、減法，或者只有乘、除法，一般要從左到右依次演算。**

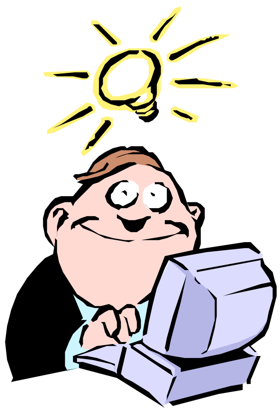
例 1：試算出 $45 - 18.5 + 24.85 - 18.35$。

解答： $45 - 18.5 + 24.85 - 18.35$

$= 26.5 + 24.85 - 18.35$

$= 51.35 - 18.35$

$= 38$



例 2：試算出 $8.5\times\frac{3}{17}\div 0.875$。

解答： $8.5\times\frac{3}{17}\div 0.875$

$= 1.5\div\frac{7}{8}$

$= \frac{3}{2}\times\frac{8}{7}$

$= \frac{12}{7}$

註：(i) **熟記一些常用的數據，對速算有很大的幫助。如分數與小數的互化：**

$\frac{1}{2}=0.5$	$\frac{1}{4}=0.25$	$\frac{3}{4}=0.75$
$\frac{1}{8}=0.125$	$\frac{3}{8}=0.375$	$\frac{5}{8}=0.625$
$\frac{7}{8}=0.875$	$\frac{1}{16}=0.0625$	$\frac{1}{20}=0.05$
$\frac{1}{25}=0.04$	$\frac{3}{2}=1.5$	……

(ii) **<u>盡早忘記帶分數</u>！小學的時候，老師總要求同學把答案用帶分數表示，不過，這種表示法到了中學會引起不必要的麻煩：**
當引入代數乘法時，我們會以「•」去取代「×」，以免跟 x **混淆。這個「•」書寫起來，若有若無，當用到分數上，很容易會混淆** $2\frac{3}{5}$ **到底代表一個帶分數，**

還是代表乘式$2\times\frac{3}{5}$。還是早一點用假分數去取代帶分數為妙。

(2) **在沒有括號的算式裡，如果既有加、減，又有乘除法，要先乘除後加減。**

例 3：試算出$10-1\frac{2}{3}\times0.72+\frac{3}{5}\div0.15$。

解答：$10-1\frac{2}{3}\times0.72+\frac{3}{5}\div0.15$

$$
\begin{aligned}
&= 10-\frac{5}{3}\times0.72+\frac{3}{5}\div\frac{3}{20}\\
&= 10-1.2+4\\
&= 12.8
\end{aligned}
$$

(3) **在有括號的算式裡，要先算括號裡的數式。**

例 4：試算出$7.56\times\left[1\div(3\frac{1}{10}-3.09)\right]\times\frac{1}{7}\div10.8$。

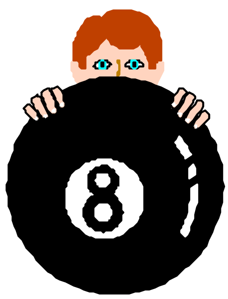
解答：$7.56\times\left[1\div(3\frac{1}{10}-3.09)\right]\times\frac{1}{7}\div10.8$

$$
\begin{aligned}
&= 7.56\times[1\div(3.1-3.09)]\times\frac{1}{7}\div10.8\\
&= 7.56\times(1\div0.01)\times\frac{1}{7}\div10.8\\
&= \frac{7.56\times100}{7\times10.8}\\
&= 10
\end{aligned}
$$

註：(1) **其實筆者已用上速算的技術（偷雞！），將「$\div10.8$」看為「$\times\frac{1}{10.8}$」，十分有利進行約分，只要先將$\frac{7.56}{7}$約為 1.08，以後的計算會容易得多！**

(2) **盡早將「$a\div b$」的形式改用$\frac{a}{b}$去表示。對剛升上中學的同學來說，要一下子把小學時用得很「舒暢」的習慣改過來，是件很難的事情。不過，同學們往後自會體現箇中道理。**

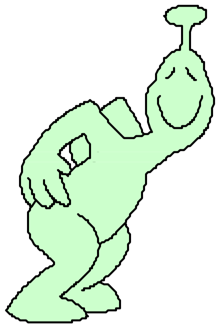
在計算時，特別要提防被一些特殊的數據干擾，產生計算的錯誤。



例如： (1) $74.97-74.97\times\frac{8}{9}$

這道題目容易受「從左到右」的法則影響下，被「同數相減得零」所干擾，產生下面的錯誤：

$74.97-74.97\times\frac{8}{9} = 0\times\frac{8}{9}=0$



(2) $\frac{4}{7}\times 7\div\frac{4}{7}\times 7$

這道題目容易被這個「÷」號干擾，再加上「先乘除後加減」這深植腦海的口訣，以為真的要「先」乘「後」除，錯誤地如下演譯：

$$\begin{aligned}\frac{4}{7}\times 7\div\frac{4}{7}\times 7 &= \left(\frac{4}{7}\times 7\right)\div\left(\frac{4}{7}\times 7\right)\\ &= 4\div 4\\ &= 1\end{aligned}$$

但我們只要緊守將「$a\div b$」轉為$\frac{a}{b}$的原則，問題就變得清晰易解了：

$$\begin{aligned}\frac{4}{7}\times 7\div\frac{4}{7}\times 7 &= \frac{\frac{4}{7}\times 7\times 7}{\frac{4}{7}}\\ &= 49\end{aligned}$$

（二） 靈活掌握計算方法

從上面例子，同學或已察覺得到，四則運算要做得好，除了要掌握運算的順序外，還要靈活運用不同的計算方法。分數、小數混合運算比較複雜，究竟把小數轉成分數方便呢？還是把分數轉成小數對運算有利呢？這實在不能一概而論，只能根據具體情況合理地進行選擇，切忌一成不變。

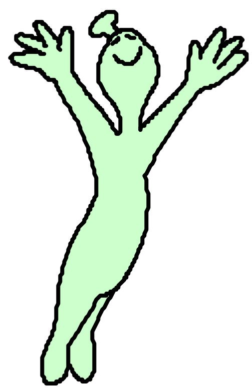
例 5：試算出$0.5\times\frac{6}{29}\div 0.15\times 7.25$。

解答：$0.5\times\frac{6}{29}\div 0.15\times 7.25$

$$\begin{aligned}&= \frac{3}{29}\div 0.15\times\frac{29}{4}\\ &= \frac{3}{4}\times\frac{20}{3}\\ &= 5\end{aligned}$$

沒有將 0.5 **轉為**$\frac{1}{2}$**，因為**$0.5\times 6=3$**是明顯的結果，無謂浪費氣力；至於將** 7.25 **轉為假分數**$\frac{29}{4}$**，馬上令題目變得容易。若果同學能迅速將** 0.15 **轉為最簡分數**$\frac{3}{20}$**的話，那計算的速度將更為提高。**

因此，同學在進行運算的時候，一定要靈活多變，盡可能將數據變得有利計算，以下的例題將令同學對「靈活」的義意有更深刻的體味。



例 6：試算出 $24.75\times(7\frac{5}{12}\div0.875)\times(1\frac{3}{4}-1.75)$。

解答：若果只「死守」著從左到右的原則，同學一定會浪費氣力——只要在全面審題時發現 $1\frac{3}{4}-1.75=0$，**前面的複雜計算根本就可以「按兵不動」：**

$$\begin{aligned} & 24.75\times(7\frac{5}{12}\div0.875)\times(1\frac{3}{4}-1.75) \\ = \ & 24.75\times(7\frac{5}{12}\div0.875)\times0 \\ = \ & 0 \end{aligned}$$

熱身運動的份量也差不多了，是時候「殺入」正題，介紹一些速算的技術！

速算

在一些四則混合運算的題目中，數的加、減、乘、除，有時可以利用數與數的組成和分解，數的某些特點，又或是運算定律、性質以及和、差、積、商的變化規律等，把按常規計算起來比較複雜的運算變得簡單、快捷，就是所謂的速算。

同學可記得以下速算的小技巧？

$$\begin{array}{r} 2\ \ 5 \\ \times\quad 2\ \ 5 \\ \hline ?\ \ ?\ \ ? \end{array} \quad\rightarrow\quad \begin{array}{r} 3\ \ 5 \\ \times\quad 2\ \ 5 \\ \hline 6\ \ 2\ \ 5 \end{array}$$

拾位加 1 為 2，然後 $3\times2=6$。

先個位相乘， $5\times5=25$。

這是對於「拾位相同，個位同是 5**」的數乘的速算小技巧。是否很利害呢！其實這技巧不單止適用於「拾位相同」，甚至適用於「百拾位相同」、「千百拾位相同」…等數乘上：**

$$\begin{array}{r} 1\ \ 1\ \ 5 \\ \times\quad 1\ \ 1\ \ 5 \\ \hline ?\ \ ?\ \ ?\ \ ?\ \ ? \end{array} \quad\rightarrow\quad \begin{array}{r} 1\ \ 2\ \ 5 \\ \times\quad 1\ \ 1\ \ 5 \\ \hline 1\ \ 3\ \ 2\ \ 2\ \ 5 \end{array}$$

百拾位加 1 為 12，然後 $12\times11=132$。

先個位相乘， $5\times5=25$。

當然，情況越複雜，乘法運算的素求就會越提高；連 12×11 **都要數數手指，拿筆算算，那還有速算的味道？噓！同學勿報以「噓」聲，這技巧還不止於此，對於個位是** 5 **的速算還有以下兩種：**

(1) 5 前面的數相加是偶數：

$45 \times 25 = 11 \quad 25$

個位 $5 \times 5 = 25$

拾位 $4 \times 2 + \dfrac{4+2}{2} = 11$

(2) 5 前面的數相加是奇數：

$105 \times 35 = 36 \quad 75$

個位 $5 \times 5 + 50 = 75$

拾位 $10 \times 3 + \dfrac{10+3-1}{2} = 36$

除了「個位同是 5」的速度算外，只要兩數的「個位的和是 10，拾位相同」的話，我們都可以用類似的速算法的：

$$\begin{array}{r} 2\ 8 \\ \times \quad 2\ 2 \\ \hline ?\ ?\ ? \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 3\ 8 \\ \times \quad 2\ 2 \\ \hline 6\ 1\ 6 \end{array}$$

拾位加 1 為 2，
然後 $3 \times 2 = 6$。

先個位相乘，
$8 \times 2 = 16$。

是否覺得有趣呢？同學不妨自己動手去做一下，也想一想，到底「拾位不同」會否有同樣的速算法呢？在此，筆者為同學多介紹一種，就是「個位相同，拾位的和是 10」的速算術。例如

$49 \times 69 = 33 \quad 81$

個位 $9 \times 9 = 81$

拾位 $4 \times 6 + 9 = 33$

$22 \times 82 = 18 \quad 04$

個位 $2 \times 2 = 4 < 10$，接寫時在 4 前補上一個 0。

拾位 $4 \times 6 + 9 = 33$

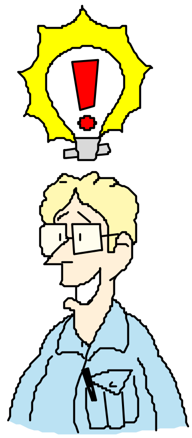
至於上述速算法的「機關」，筆者會在後一節「從算術到代數」漂亮地解釋一下。

另一個速算小技巧，是一個數×11的規律：所得的積首尾兩位數字不變，中間的數字就是被乘數相鄰的兩個數字相加的和，滿十進一。例如

$435 \times 11 = 4785$

4　3　5　　×　11

4　7　8　5



再看以下算式：

6　7　8　5　4　　×　11

6　13　15　13　9　4

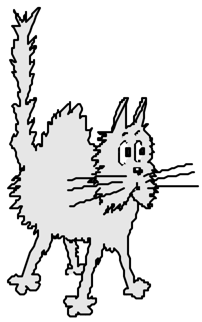
7　4　6　3　9　4

$67854 \times 11 = 746394$

看過一些速算的小技巧，讓我們談談以下幾種常用的速算方法。

（一）　改變運算的順序

這是最常用的技術，通過改變運算的順序，可使某些數組合成易於計算的數值（最常是把它們合成「0」字尾，或將小數合成整數），從而簡化計算的工序。



例 7：試算出 1234 + 5678 + 8766 + 4322。

解答：切勿因循於法則上，巧妙的調動，將減省不少繁瑣的計算。

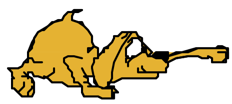
$$\begin{aligned}&1234 + 5678 + 8766 + 4322\\&= (1234 + 8766) + (5678 + 4322)\\&= 10000 + 10000\\&= 20000\end{aligned}$$

例 8：試算出 12345 – (1234 + 2345)。

解答： 12345 – (1234 + 2345)

$$\begin{aligned}&= 12345 - 1234 - 2345\\&= 10000 - 1234\\&= 8766\end{aligned}$$

（二）　改變運算符號



加數不一定要用加法，乘數也不一定要用乘法，轉加為乘，轉乘為除…往往會有意想不到的收獲。

例 9：試算出$4.5 \div 8 \div 125$。

解：將除數以分式表示，轉除為乘，「玄機」馬上出現。

$$\begin{aligned} 4.5 \div 8 \div 125 &= \frac{4.5}{8 \times 125} \\ &= \frac{4.5}{1000} \\ &= 0.0045 \end{aligned}$$

例 10：試算出715324×25。

解答：這是一個很好的例題，當乘數去辦，會是一道繁瑣的題目，但當它是除數，卻簡單得出奇。

$$\begin{aligned} 715324 \times 25 &= 715324 \div 4 \times 100 \\ &= 17883100 \end{aligned}$$

（三） 湊整

有些題目我們可以把其中的數轉化成整十、整百、整千……，從而使計算簡便。

例 11：試算出 $9 + 99 + 999 + 9999 + 99999$。

解答：$9 + 99 + 999 + 9999 + 99999$

$= (10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + (10000 - 1)$

$= \boxed{11110 - 5}$ **（可略去）**

$= 11105$

例 12：試算出1111×99999。

解答：

$$\begin{aligned} 1111 \times 99999 &= 1111 \times (100000 - 1) \\ &= 111100000 - 1111 \\ &= 111098889 \end{aligned}$$

例 13：試算出28×42。

解答：雖然兩個數的「個位的和是 10」**，但拾位並不相同，我們不能用之前介紹的小技巧去計算。但用湊整的方法，仍可以令計算變得輕鬆。**

解法一：

$$\begin{aligned} 28 \times 42 &= (30 - 2) \times 42 \\ &= 30 \times 42 - 2 \times 42 \\ &= 1260 - 84 \\ &= 1176 \end{aligned}$$

解法二：

$$\begin{aligned} 28 \times 42 &= 28 \times (40 + 2) \\ &= 28 \times 40 + 28 \times 2 \\ &= 1120 - 56 \\ &= 1176 \end{aligned}$$

(四) 添 0 折半

用 5 **乘一個雙數，由於** $5=10\div2$**，因此，可以先用** 2 **除被乘數，然後再用** 10 **去乘所得的商，也就是在商後面添一個「0」。如果被乘數是一個單數，則先用** 10 **乘，再用** 2 **除，使計算簡單。**

例 14**：試算出** 2838×5。

解答： $2838\times5 = 2838\div2\times10$

$= 1419\times10$

$= 14190$

例 15：試算出 634×1.5。

解答： $637\times1.5 = 634\times(1+0.5)$

$= 634 + 634\times0.5$

$= 634 + 317$

$= 951$

（四） 抽公因式

抽公因式是初中數學裡最重要的技巧，因此，在數學競賽的速算題中，經常會見到此類問題。

例 16：試算出 $23\times2\times4+24\times4\times2+26\times1\times8+27\times8\times1$。

解答： $23\times2\times4+24\times4\times2+26\times1\times8+27\times8\times1$

$= 23\times8+24\times8+26\times8+27\times8$

$= 8\times(23+27+24+26)$ **（抽公因式後，括號內的運算順序同時改變）**

$= 8\times100$ **（可略去）**

$= 800$

例 17：試算出 $11\times11\times11-11\times11+11$。

解答： $11\times11\times11-11\times11+11$

$= 11\times11\times(11-1)+11$

$= 11\times11\times10+11$

$= 11\times(11\times10+1)$

$= 11\times111$

$= 1221$

例 18：試簡化 $\dfrac{136136136136}{221221221221}$。

解答： $\dfrac{136136136136}{221221221221} = \dfrac{136\times1001001001}{221\times1001001001}$

$= \dfrac{136}{221}$

$= \dfrac{8}{13}$

（五） 因式分解

跟「抽公因式」一樣，因式分解同樣是初中數學最重要技巧。先將數分解成因子，再進行湊整，令計算變得快捷簡便。

例 19：試算出 $0.125\times0.25\times64\times0.5$。

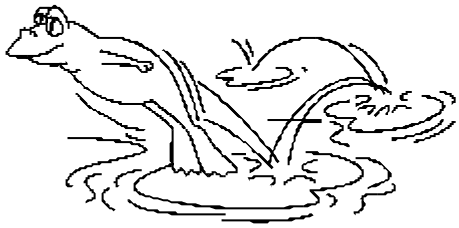
解答：只要將 64 分解為 $8\times4\times2$**，再利用** $0.125\times8=1$**，** $0.25\times4=1$**，** $0.5\times2=1$**，問題馬上變得容易。**

$$\begin{aligned}&0.125\times0.25\times64\times0.5\\=\;&(0.125\times8)\times(0.25\times4)\times(0.5\times2)\\=\;&1\end{aligned}$$

例 20：試算出 $4444\times9999\div6666$。

解答： $4444\times9999\div6666$

$$\begin{aligned}&=\frac{4\times1111\times9\times1111}{6\times1111}\\&=6\times1111\\&=6666\end{aligned}$$



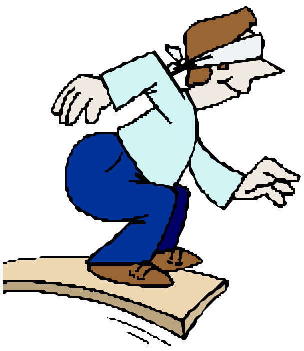
（六） 運用公式

此章節將介紹三條常用於速算的公式，第一條同學應該在小學時或已學會；第二條嚴格來說不是公式，但學會箇中的技巧卻受用無窮；最後一條公式是中二才會接觸的恆等式，可算是到了最艱深的境界。

(i) $\boxed{\text{數的總和}\ =\ （\text{頭}+\text{尾}）\times\text{項數}\div2}$

這公式在第四章《數列》已作過介紹，在速算上應用不多，因為若然問得太深入的話，就會似數列問題多過似速算了。

例 21：試算出 $\frac{1}{39}+\frac{2}{39}+\frac{3}{39}+\ldots+\frac{12}{39}-\frac{13}{111}-\frac{14}{111}-\ldots-\frac{24}{111}$。



解答： $\frac{1}{39}+\frac{2}{39}+\frac{3}{39}+\ldots+\frac{12}{39}-\frac{13}{111}-\frac{14}{111}-\ldots-\frac{24}{111}$

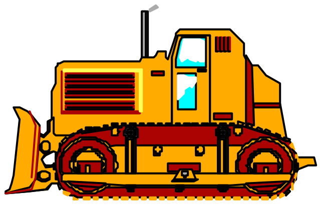
$$\begin{aligned}&=\frac{1}{39}(1+2+3+\ldots+12)-\frac{1}{111}(13+14+\ldots+24)\\&=\frac{1}{3\times13}\times\left[\frac{12\times(1+12)}{2}\right]-\frac{1}{3\times37}\times\left[\frac{12\times(13+24)}{2}\right]\\&=2-2\\&=0\end{aligned}$$

例 22：試算出(2 + 4 + 6 + …+ 98 + 100) – (1 + 3 + 5 + …+ 97 + 99)。

解答：哈！哈！是不是為要應用上述公式而苦惱呢？筆者早就說過它在速算上應用的機會不多，但作為騙人的「煙幕」卻時有出現，這道題目其實只是改變運算順序的題目。下次不要上當了！

$$(2+4+6+\ldots+98+100)-(1+3+5+\ldots+97+99)$$
$$=(2-1)+(4-3)+(6-5)+\ldots+(98-97)+(100-99)$$
$$=\underbrace{1+1+\ldots+1}_{50\text{個}}$$
$$=50$$

(ii) $$\boxed{\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}$$



要利用這條公式，一定要留意數串的分母，若果發現它們是一串連續的數字，那就是最大的提示了。從這類例題中，同學要學習那「加減相消」的技術。

例 23：試算出 $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}$。

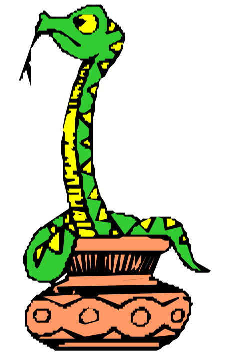
解答：驟眼看去，是很難理解怎樣使用上述公式的，但只要將分母進行分解，玄機自會顯露出來。

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}$$
$$=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}+\frac{1}{6\times7} \quad \text{（分母是一串連續數字）}$$
$$=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{6})+(\frac{1}{6}-\frac{1}{7})$$
$$=1-\frac{1}{7} \quad \text{（除首項和末項，所有中項均加減相消）}$$
$$=\frac{6}{7}$$

例 24：試算出 $\frac{1}{1\times7}+\frac{1}{7\times13}+\frac{1}{13\times19}+\frac{1}{19\times25}+\ldots+\frac{1}{79\times85}$。

解答：分母雖然仍是一串數字，但它們的差不是 1，計算起來就有點複雜了。

$$\frac{1}{1\times7}+\frac{1}{7\times13}+\frac{1}{13\times19}+\frac{1}{19\times25}+\ldots+\frac{1}{79\times85}$$
$$=\frac{1}{6}\times\left(\frac{6}{1\times7}+\frac{6}{7\times13}+\frac{6}{13\times19}+\frac{6}{19\times25}+\ldots+\frac{6}{79\times85}\right)$$
$$=\frac{1}{6}\times\left[(1-\frac{1}{7})+(\frac{1}{7}-\frac{1}{13})+(\frac{1}{13}-\frac{1}{19})+(\frac{1}{19}-\frac{1}{25})+\ldots+(\frac{1}{79}-\frac{1}{85})\right]$$
$$=\frac{1}{6}\times\left(1-\frac{1}{85}\right)$$



$$= \frac{1}{6} \times \frac{84}{85}$$

$$= \frac{14}{85}$$

(iii) $\boxed{a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)}$

例 25：試算出 $101^2 - 99^2$ （**註：** $101^2 = 101 \times 101$）。

解答： $101^2 - 99^2 = (101 + 99)(101 - 99)$

$= 200 \times 2$

$= 400$

例 26：試算出 $100^2 - 99^2 - 98^2 + 97^2 + 96^2 - 95^2 - 94^2 + 93^2 + \ldots + 4^2 - 3^2 - 2^2 + 1^2$。

解答： $100^2 - 99^2 - 98^2 + 97^2 + 96^2 - 95^2 - 94^2 + 93^2 + \ldots + 4^2 - 3^2 - 2^2 + 1^2$

$= (100^2 - 99^2) - (98^2 - 97^2) + (96^2 - 95^2) - (94^2 - 93^2) + \ldots + (4^2 - 3^2) - (2^2 - 1^2)$

$= (100 + 99)(100-99) - (98 + 97)(98 - 97) + \ldots + (4 + 3)(4 - 3) - (2 + 1)(2 - 1)$

$= 199 - 195 + 191 - 187 + \ldots + 7 - 3$

$= \underbrace{4 + 4 + \cdots + 4}_{25個}$

$= 100$

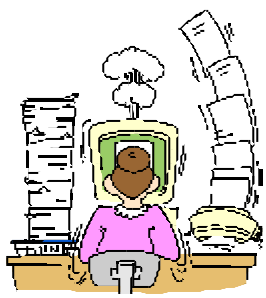
從算術到代數

不論是小學抑或中學，當我們完成四則混合運算後，很自然地就要學習代數。不過，不知怎地，大多在算術表現輕鬆的同學，在代數卻忽然遇上難題。若果算術(Arithmetic)是指數字的四則運算，那代數(Algebra)就是符號（數式）的四則運算了。在算術裡，由於全是數字的運算，很多數學的規律都會被數字本身所「遮蓋」，為要學習這些被隱藏的定律，我們用符號「代」替數字，令它們「重現」眼前。

大家不要以為代數是件新玩意，必然會有另一套不同於算術四則運算的法則，剛才不是說過，代數就是用符號去「代」替數字的嗎？那麼，符號本身就是數字！所以，<u>一切在算術上應用的法則，都適合用於代數上</u>；只是記號上有些大同小異而矣。

首先，為要避免跟常用的符號「x」混淆，乘號「×」會被「.」或括號「( )」所取代，最方便是乾脆甚麼都不用；至於除號「÷」，之前已經指出，為避免產生混淆，一概會用分數形式取代（如下表）。

	算　術	代　數
加法	4 + 7	a + b
減法	4 – 7	a – b
乘法	4×7	$a \cdot b$, $(a)(b)$, ab ,
除法	$4 \div 7$	$\frac{a}{b}$



記號的不同，馬上會引起一個歧異：

	算　術	代　數	備　　註
(1)	$28\div3\times5$	$a\div b\times c$	$b\times c$ **的乘號不可刪去**
(2)	$28\div3\div5$	$a\div b\div c$ $a\div bc$	**這個表示法是算術所沒有的**

在(2)裡， $a\div bc$ **其實是隱含有** $a\div(bc)$ **的意思，因此，我們絕不能輕率地讀作「a 除 b 乘 c」，令數式變成** $a\div b\times c$ **。不過，若果應用分數形式去表示除法的話，無論在算術或代數裡，意思都會變得一清二楚：**

	一般形式	分數形式	一般形式	分數形式
算術	$28\div3\times5$	$\frac{28\times5}{3}$	$28\div3\div5$	$\frac{28}{3\times5}$
代數	$a\div b\times c$	$\frac{ac}{b}$	$a\div b\div c$ $a\div bc$	$\frac{a}{bc}$

看過記號上的注意事項後，讓我們討論一下運算法則的差異。試看以下兩題：

(1)　$4+4+4+4=\ 4\times4\ =16$

(2)　$4\times4\times4\times4=4^4\ =256$

在算術裡，它們都不是難題，許多同學甚至毋須中間的步驟，就可以直接得到答案。不過，筆者早就說過，由於是全數字的關係，同學往往忽略了中間步驟蘊涵著的數學規律，到了代數就有些混亂了：

這個 4 字，是記錄了 x 連續被加的次數。

(1)　$x+x+x+x=4x$

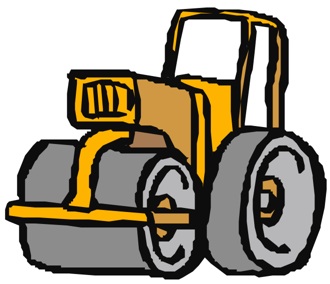
(2)　$x\cdot x\cdot x\cdot x=x^4$

這個 4 字，是記錄了 x 連續被乘的次數。

於是，以下的題目就得到似是而非的答案：

(3)　$x^2+x^2=x^4$

(4)　$x^2+x^2=2x^4$



(3)的錯誤，是對(2)的誤解，將加法當乘法；而(4)錯誤，則是對(1)和(2)的混淆。其實同學只要小心應用(1)或(2)，不難得出正確的答案是

(5)　$x^2+x^2=2x^2$

好了，談過一些記號和運算法則的差異後，讓我們看看代數的威力吧！還記得「拾位相同，個位的和是 10」的乘法嗎？為使問題簡約一點，我們不妨考慮 $\underline{2x}\times\underline{2y}$，其中 $\underline{2x}$、$\underline{2y}$ 代表不同的 2 位數，且 $x + y = 10$，則

$$
\begin{aligned}
2\underline{x}\times 2\underline{y} &= (20+x)(20+y)\\
&= 20\times 20 + 20x + 20y + xy\\
&= 20\times 20 + 20(x + y) + xy\\
&= 20\times 20 + 20\times 10 + xy\\
&= 20(20 + 10) + xy\\
&= 20\times 30 + xy\\
&= 600 + xy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rrr}
 & 2 & x\\
\times & 2 & y\\
\hline
? & ? & ?
\end{array}
\quad\rightarrow\quad
\begin{array}{rrr}
 & 3 & x\\
\times & 2 & y\\
\hline
 & 6 & xy\\
\hline
\end{array}
$$

所謂神機妙算，其實不過代數推演下的必然結果而矣。不過，同學們應該對代數有些另眼相看吧！沒有？看看以下例題：

例 27：試算出 $\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\right)\times\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}\right)-\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}\right)\times\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\right)$。

解答： 這道題目若果只用普通的方法，就會面對許多<u>沒必要的</u>繁瑣步驟，但若果利用代數的方法，將相同的東西以符號代替的話，推演會變得很簡單：

令 $x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}$， $y=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}$，則

原式 $= (1 + y)(x) – (1 + x)(y)$

$= x + xy – (y + xy)$

$= x + xy – y – xy$

$= x – y$

$= \dfrac{1}{5}$

從上面的推演可知，xy（即 $(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5})\times(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4})$）會被消去，故從開始就沒必要算出來，只是這個特質在全數字的環境下很難覺察得到，到了代數就無所遁形。再看以下例題。

例 28：試算出 $\dfrac{1234567890}{(1234567891)^2-1234567890\times 1234567892}$。

解答： 設 x = 1235467890，則

原式 $= \dfrac{x}{(x+1)^2-x(x+2)}$

$= \dfrac{x}{x^2+2x+1-x^2-2x}$　　　【$(x+1)^2=(x+1)(x+1)$

$= x$　　　　　　　　　　　　　　　$=x^2+2x+1$】

$= 1234567890$

估算

貨品	價目
汽水一罐	$4.70
薯片一包	$8.20
巧克力一盒	$13.90
牙擦一支	$7.50
原子筆一支	$2.20
簿一本	$4.00
紙巾一盒	$6.60

最後，筆者打算介紹一下「估算」的技巧。「靠估」也有技巧？讓我們看看以下例子：小明到超級市場買東西，但口袋裡只有一張 50 元紙幣，於是他看一看購物籃裡貨品的價目，得右列清單。

這時，我們沒有逼切的需要知道確切的數字，只要一個約數就足夠了，利用 4 捨 5 入的原則，將價目進行簡約，則

價目總數　$5 + 8 + 14 + 8 + 2 + 4 + 7$

48

再看清單一次，發覺小數後一位大於 5 的比小於 5 的多，因此，我們有理由相信上面價目的總數是少於$48 元的（實額是$46.5 元）。小明應該夠錢付賬！

在數學裡，好些地方都會用到估算的技巧。除了使用「4 捨 5 入」外，我們還會用「<」（小於）和「>」（大於）兩符號的幫助。

例 29：若 $\dfrac{A}{B} = \dfrac{13579111315171921232 5}{52321291715131119753 1}$，求 $\dfrac{A}{B}$ 小數後前 3 位是多少？

解答：由於題中所涉及的數太大，不太可能通過直接計算來確定前 3 位數，只能利用估值的方法去解決。

Θ　$\dfrac{13}{53} < \dfrac{A}{B} < \dfrac{14}{52}$

$0.2 < \dfrac{A}{B} < 0.3$

∴　此數的第一位數字為 2。

又　$\dfrac{135}{523} < \dfrac{A}{B} < \dfrac{136}{523}$

$0.258 < \dfrac{A}{B} < 0.260$

∴　此數的第一、二、三位數字為 2、5、9。

從上面的例題可以知道，估值的常用方法：(i)省略尾數取近似值；(ii)用放大或縮小的方法來確定某個數或某個算式的取值範圍進行估算。

例 30：試求 S = $\dfrac{1}{\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{12}+\ldots+\dfrac{1}{19}}$ 的整數部份是多少？

解答：因為 $\dfrac{1}{10}>\dfrac{1}{19}$，所以若將分母的 10 個數都換作 $\dfrac{1}{10}$ 的話，則得數少於 S；相反，

若將 10 個數都換作 $\dfrac{1}{19}$ 的話，則得數大於 S，即

$$\frac{1}{10\times\frac{1}{10}}<S<\frac{1}{10\times\frac{1}{19}}$$

$$1<S<\frac{19}{10}$$

$\therefore$ S 的整數部分應為 1。

例 31：試求 S = $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{16}$ 整數部份是多少？

解答：若利用上例的技巧，則我們得：

$$16\times\frac{1}{16}<S<16\times 1$$

$$1 < S < 16$$

這樣就求不出 S 的整數部份了，說明估算得出的範圍可再精確一些。而且，光是整體換上同一個數的「整體估算」技術行不通時，我們就必須進行「分段估算」。

$$S = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{16}$$

$$S = 1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{2個數}+\underbrace{\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{8}}_{4個數}+\underbrace{\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}}_{8個數}$$

$$> 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\underbrace{\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{8}}_{4個數}+\underbrace{\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}}_{8個數}$$

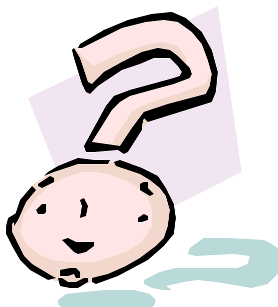
$$= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

$$= 3$$

$$S = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\underbrace{\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{7}}_{4個數}+\underbrace{\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{11}}_{4個數}+\underbrace{\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{15}}_{4個數}+\frac{1}{16}$$

$$<$$

$$= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{16}$$



$$= \quad 3+\frac{2}{3}+\frac{1}{16} \qquad \text{(可略去)}$$

$$= \quad 3\frac{35}{48}$$

$$\therefore \quad 3 < S < 3\frac{35}{48}$$

則 S 的整數部份為 3。

從上例的估算過程中，可以看出兩條估算的法則：(一) 1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$相對來說是較大數，不能參與估算。(二) 分段要合理，不但分的段數要合理，而且分段估算也要合理。上例兩種分段估算的方法都很特別，值得同學多加參考和活用。

當然，同學或會覺察到，這種分段估算的方法不止一種，對！只要便於估算又能使結果達到要求，同學一樣可以自己動手得到一個更好的範圍的。

例 32：求 $S = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}\right)\times 1001$的整數部分。

解答：這道題目可以用直接通分再求值的方法，求出 S 的整數部分。但是若將原式適當變形，然後採用估值法則簡單得多。

$$\Theta \qquad 1001 = 7\times 11\times 13\text{，}\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5} = 1\frac{1}{30}\text{。}$$

$$\therefore \qquad S = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}\right)\times 7\times 11\times 13$$

$$= \left(1+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{30}\right)\times 7\times 11\times 13$$

$$= 1001+143+91+\frac{1001}{30}$$

$$= 1001 + 143 + 91 + 33\frac{11}{30}$$

$$= 1268\frac{11}{30}$$

$\therefore$ S 的整數部分是 1268。

習題

試算出以下數式：

1. (a) $0.5\times[(5.2+1.8-5.2+1.8)\div(1-0.75)]$

   (b) $97\frac{13}{45}-\left(30.85+60\frac{13}{45}\right)$

   (c) $(0.5+0.25+0.125)\div(0.5\times0.25\times0.125)\times\dfrac{\frac{7}{18}\times\frac{9}{2}+\frac{1}{6}}{13\frac{1}{3}-\frac{15}{4}\times\frac{16}{5}}$

   (d) $454500\div(25\times45)$

2. (a) $4976-1998$

   (b) $574+499$

   (c) $199999+19999+1999+199+19$

   (d) $9\frac{3}{4}+99\frac{3}{4}+999\frac{3}{4}+9999\frac{3}{4}+1$

   (e) $599996+49997+3998+407+89$

   (f) 374×101

   (g) 11111×9999

   (h) $999\times274+6270$

3. (a) 4325×5

   (b) 128×1.5

4. (a) $999\times87.5+87.5$

   (b) $\dfrac{12.3+34.5+56.7+78.9}{1.23+3.45+5.67+7.89}$

   (c) $35\frac{5}{9}\times29+65\frac{5}{9}\times29-\frac{1}{9}\div\frac{1}{29}$

   (d) $99+99\times99+99-9999$

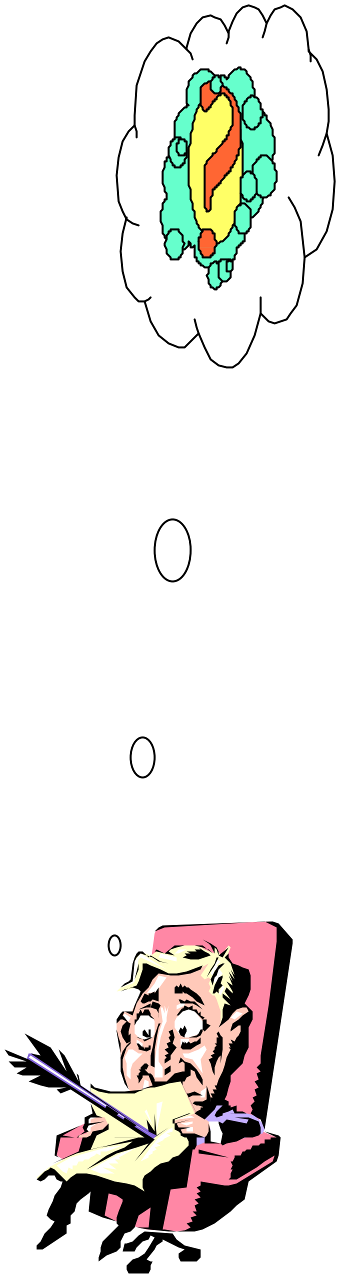
   (e) $9+99+9\times99+9\times999$

   (f) $1994\times56.87+1994\times43.48+60\times10.035$

   (g) $1996\times19951995-1995\times19961996$

   (h) $(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+\frac{1}{96}+\frac{1}{192}+\frac{1}{384})\times128$

   (i) $\dfrac{1\times2\times3+2\times4\times6+3\times6\times9...+100\times200\times300}{2\times3\times4+4\times6\times8+6\times9\times12+...+200\times300\times400}$



5. (a) $625 \times 32 \times 125$

(b) $4444 \times 7777 \div 1111$

(c) $2400000 \div 25 \div 32 \div 125$

7. (a) $1999 + 1998 - 1997 + 1996 - 1995 + 1994 - \ldots + 4 - 3 + 2 - 1$

(b) $1000 + 999 - 998 - 997 + 996 + 995 - 994 - 993 + \ldots + 4 + 3 - 2 - 1$

(c) $100 + 99 + 98 - 97 - 96 + 95 + 94 + 93 - 92 - 91 + \ldots + 5 + 4 + 3 - 2 - 1$

8. (a) $\dfrac{2+4+6+\ldots+18+20}{1+3+5+\ldots+19+21}$

(b) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{35}+\dfrac{1}{63}+\dfrac{1}{99}$

(c) $1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\dfrac{1}{1+2+3+4}+\ldots+\dfrac{1}{1+2+\ldots+100}$

(d) $\left(100^2+98^2+96^2+\ldots+4^2+2^2\right)-\left(99^2+97^2+95^2+\ldots+3^2+1^2\right)$

(e) $(1-\dfrac{1}{2\times 2})\times(1-\dfrac{1}{3\times 3})\times(1-\dfrac{1}{4\times 4})\times\ldots\times(1-\dfrac{1}{1999\times 1999})$

9. (a) $78\times\dfrac{76}{77}$

(b) $39\dfrac{39}{40}\times 39$

(c) $\dfrac{382+498\times 381}{382\times 498-116}$

(d) $\dfrac{1+2+3+4+5+6+7+8+7+6+5+4+3+2+1}{88888888\times 88888888}$

10. **試算出** $\dfrac{2345}{2345^2-2344\times 2346}$。

11. **試算出** $\left(\dfrac{531}{135}+\dfrac{579}{357}+\dfrac{753}{975}\right)\times\left(\dfrac{579}{357}+\dfrac{753}{975}+\dfrac{135}{531}\right)-\left(\dfrac{531}{135}+\dfrac{579}{357}+\dfrac{753}{975}+\dfrac{135}{531}\right)\times\left(\dfrac{579}{357}+\dfrac{753}{975}\right)$。

12. **若** $\dfrac{x}{y}=\dfrac{12345678910111213}{32111101987654321}$，**求** $\dfrac{x}{y}$ **小數點前 3 位是多少？**

13. **若** $S=\dfrac{1}{\dfrac{1}{1980}+\dfrac{1}{1981}+\ldots+\dfrac{1}{1991}}$，**試求 S 的整數部分。**

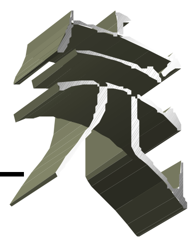
14. **已知** x **是自然數，且** $x^5 = 229345007$**，試利用估值的方法求** x **之值。**

15. **若** $A = \dfrac{12\times 67+13\times 66+14\times 69+15\times 70+16\times 71}{12\times 66+13\times 67+14\times 68+15\times 69+16\times 70}\times 100$**，求** A **的整數部分。**

16. **如下算式，**A、B、C**均為整數，右邊答案只寫出了四捨五入後的近似值：**

$$\frac{A}{3}+\frac{B}{5}+\frac{C}{7}\approx 1.16$$

試求A、B、C**三個數。**



顧問老師：梁志明、黃萬安、黃偉智、楊振雄、袁仲強
仁愛堂田家炳中學數學組