解難之趣

屯門區小學數學比賽專題特刊

第十屆　　一九九九年四月三十日

數列問題

在初中，同學或者會對「數列」(Sequence)這類題目感到陌生，但它在數學裡的地位可真不輕呢！它是數學競賽中的常客，也是高中數學一個重要的課題。

最初遇到這類題目，同學也許會感到困難，不知如何去對付那一大串長長的數串，和那個惹人討厭的省略號。其實，這類題目也不是那麼令人懼怕，祇要你尋找到數列的形式(pattern)，再加上一條「強勁」的公式，問題就可以迎刃而解。

一切從高斯開始

世界著名數學家高斯（註[1]）幼年時，數學老師出了一道題讓同學們計算：

$1 + 2 + 3 + 4 + ... + 97 + 98 + 99 + 100 = ?$

老師出完題目後，全班同學都在埋頭計算，年僅9歲的高斯卻運用了一個十分乖巧的方法，很快就說出正確的答案5050。這使那些正忙於把這100個數一一相加的同學和老師都大叫一驚！到底高斯用了甚麼乖巧的方法呢？

原來高斯通過細心的觀察，發現1至100這一串數有一定的規律：

$$1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = 4 + 97 = ... = 49 + 52 = 50 + 51 = 101$$

即首尾兩端距離相等的每兩個數的和，都等於首尾兩數的和。而這樣的數共有50對，因此，這串數的和就是$101\times 50 = 5050$。列出算式如下：

$$1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99 + 100 = \frac{100\times(1+100)}{2}$$
$$= 5050$$

熟識這類題目的同學，或會脫口說出一條從小學學會的公式：

$$\boxed{\text{數的總和＝（頭項＋尾項）×項數÷2}} \quad \cdots\cdots\ (*)$$

不過，不是任何數列都能夠利用上列公式去求和

[1] 高斯 Gauss, Carl Friedrich (1777-1855)德國數學家、物理學家、天文學家。幼年時已顯示出非凡的數學才能；有數學王子稱號。1799 年，年僅 19 歲的高斯發現用直尺和圓規作正 17 邊形的可能性。高斯對此成就甚感滿意，並叮囑死後要將此正 17 邊形刻於其墓碑上。

的。要應用上述公式，數列中每個數字之間必須存在一定規律；因此，要成功解決這些數串的求和問題，就得學會尋找蘊藏其中的規律。

尋找規律

嘗試尋找數列的規律時，最常用的第一個方法，就是看看數列中每個相鄰的數字是否「等距」；例如高斯面對的數列中，相鄰的數字的差都是1**，即**

1 + 2 + 3 + 4 + ... + 97 + 98 + 99 + 100

1 1 1 .... 1 1 1

所有相鄰數字等距的數列，都能夠用（＊）去求和的。試看下列例題：

例一：求以下數列的和：

(1) 2 + 4 + 6 + 8 + ... + 96 + 98 + 100

(2) 1 + 3 + 5 + 7 + ... + 95 + 97 + 99

(3) 2 + 5 + 8 + 11 + ... + 92 + 95 + 98

解答：設數列的和為S**（一般都會用**S(Sum of sequence)**這個文字去代表一數列的和），為敘述方便，我們用**S_1**代表題**(1)**數列的和，用**S_2**代表題**(2)**數列的和；如此類推。**

(1) **由於是「等距」的數列，而且數列共有**50**個數字，故由（＊）得**

$$S_1 = \frac{(2+100)\times 50}{2}$$

$$= 2550$$

(2) **這數列亦是「等距」的數列，亦有**50**個數字，故由（＊）得**

$$S_2 = \frac{(1+99)\times 50}{2}$$

$$= 2500$$

(3) **這數列雖然都是「等距」（差額是**3**）的數列，但要算出它有多少項就有點棘手了；我們得利用以下方法：**

先看簡單情況，11**在數列中排第**$4 = \frac{11-2}{3}+1$**項。如此類推，則**98**所在的**

項數 $= \frac{98-2}{3}+1 = 33$

公式(**)**：**

項數 $= \frac{(\text{尾項}-\text{首項})}{\text{公差}}+1$

$$\therefore \quad S_3 = \frac{(2+98)\times 33}{2}$$

$$= 1650$$

這類「等距」的數列，一般被稱為等差數列，那相等的差額則稱為公差，數列中每一個數字稱為項，數列中數字的數目稱為項數。

例二：求所有被7除餘數是1的三位數的和。

解答：首先，我們知道，所有除7餘數是1的三位數組成一等差數列。而且能被7整除的三位數中最小的是105，所以這數列的第一項就是106，以同樣方法，可知數列的最後一項是994 + 1=995。由公式(**)得

$$\text{項數} = \frac{(995-106)}{7}+1$$

$$= 128$$

$$106 + 113 + 120 + \ldots + 995 = \frac{(106+995)\times 128}{2}$$

$$= 70464$$

除了觀察數列相鄰項的差外，另一種尋找數列規律的方法，就是看看數列間相鄰項的比值；試看看以下數列： 1, 3, 9, 27, 81, ...

我們可以尋到一定規律：$\frac{3}{1}=\frac{9}{3}=\frac{27}{9}=\frac{81}{27}=\ldots=3$。

這類擁有相同比值的數列稱為等比數列，那等比值則稱為公比。

再看看以下數列：

(1) 3, 6, 12, 24, 48, ...

(2) $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32},\ldots$

(3) -25, 5, -1, $\frac{1}{5}$, $-\frac{1}{25}$, ...

因為 (1) $\frac{6}{3}=\frac{12}{6}=\frac{24}{12}=\frac{48}{24}=\ldots=2$

(2) $\frac{1/4}{1/2}=\frac{1/8}{1/4}=\frac{1/16}{1/8}=\frac{1/32}{1/16}=\ldots=\frac{1}{2}$

(3) $\frac{5}{-25}=\frac{-1}{5}=\frac{1/5}{-1}=\frac{-1/25}{1/5}=-\frac{1}{5}$

所以上述三數列均為等比數列。不過這類數列的求和問題十分深奧，要到高中才會學到。有些數列的規律來得比較複雜；試看看以下數列：

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... (註[2])

觀其相鄰兩項之差，

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

0 1 1 2 3 5 8 13 21 ....

雖然得出的差並非相等，但由這差可知，除了前兩項外，由第三項開始，後一項必為前兩項之和。不過，這數列的求和問題更為深奧，待到預科純數學才會討論。

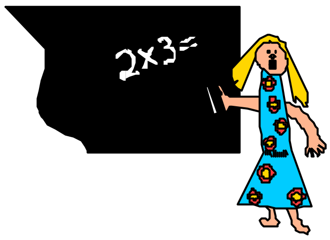
求和問題

[2]此數列由意大利數學家斐波那契 (Fibonacci, Leonardo) 在他的著作《算經》中提出，後以其名字命名。

學會尋找數列的規律，現在我們回到本章的重點：有關等差數列及其求和的問題。試看看以下例題。

例三：考慮下表的方陣，　並求此方陣中所有數的和：

1　,2　,3　,..., 98, 99,100	第 1 行
2　,3　,4　,..., 99,100,101	第 2 行
3　,4　,5　,...,100,101,102	第 3 行
4　,5　,6　,...,101,102,103	第 4 行
....	
100,101,102,...,197,198,199	第100行



解答：面對這條題目，若果同學祗用逐行求和的方法去解題，那就注定要吃苦頭了。因為你要用那公式100次，計出100個數，再將這100個數加起來，等你計完都天光了。而且，這方法根本無法應付較複雜的問題。如此「蠢」方法，不是我們所要的。

首先，我們知道第一行的和是5050，即：1 + 2 + 3 +...+ 98 +99 + 100 = 5050

現在考慮第一行和第二行，即：

1 , 2 , 3 ,..., 98, 99 ,100　　　　第 1 行

2 , 3 , 4 ,..., 99,100,101　　　　第 2 行

100-99 = 1

3-2 = 1

101-100 = 1

2 – 1 = 1

由於每個數都相差1，所以第一行和第二行相差100。再看第一行和第三行，由於每個數相差2，所以第一行和第三行相差200。如此類推，第一行和第100行相差9900（有100個99）。所以我們有

第 1 行：5050

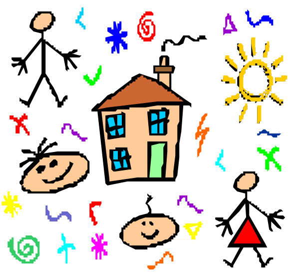
第 2 行：5050 + 100

第 3 行：5050 + 200

....

第 99行：5050 + 9800

第100行：5050 + 9900



∴　此方陣內所有數字的和

=100(5050) + (100 + 200 + 300 + ... + 9800 + 9900)

= 505000 + 100(1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99)

= 505000 + 495000

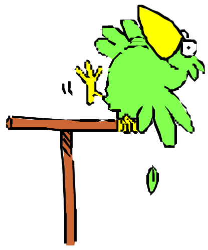
= 1000000

（本題解答由2C(94)班李家偉同學提供）

例四：將自然數(Natural Number)按下列規則排列：

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 2 & & 3 & & \\ & 4 & & 5 & & 6 & \\ 7 & & 8 & & 9 & & 10 \end{array}\qquad \begin{array}{l} \cdots\cdots\text{第1層} \\ \cdots\cdots\text{第2層} \\ \cdots\cdots\text{第3層} \\ \cdots\cdots\text{第4層} \end{array}$$

……………………



問第二十一層的第一個數是多少？

解答：「又是那些討厭的省略號」——同學們不要煩燥；煩燥是計數的大忌！驟眼看，這條題目很複雜，不知從何入手。不過，同學們難道忘記了解數列問題的「秘要」嗎？祇要找到數列的規律，問題就可以迎刃而解。

先看看每一層的第一個數，即1、2、4、7⋯，似乎全無頭緒。不要氣餒，再看看每一層的最尾一個數，有沒有發現尾數和層數的關係呢？即：

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 3 &= 1+2 \\ 6 &= 1+2+3 \\ 10 &= 1+2+3+4 \end{aligned}$$

所以每一層最尾一個數，原來就是由第一層的層數一直加到該層的層數。

第二十層最尾一個數字 $= 1 + 2 + 3 + \ldots + 18 + 19 + 20$

$= 210$

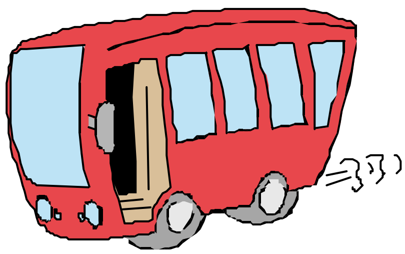
所以第二十一層的第一個數 $= 210+1$

$= 211$

（本題解答由2C(94)梁美紅同學提供）

例五：已知一串分數：

$\frac{1}{1};\frac{1}{2};\frac{2}{2};\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{3}{3};\frac{1}{4};\frac{2}{4};\frac{3}{4};\frac{4}{4};\ldots\ldots$



(1) $\frac{7}{50}$ 是此串分數中的第幾個分數？

(2) 第125個分數是幾分之幾？

解答：這串分數的排列規律是：第幾群就有幾個分數。在同一群中，分母不變，分子由小至大。

這是第4群，有4個數，分母為4，分子由1至4。

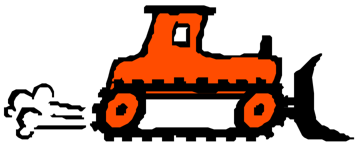
$\frac{1}{1};\frac{1}{2};\frac{2}{2};\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{3}{3};\underbrace{\frac{1}{4};\frac{2}{4};\frac{3}{4};\frac{4}{4}};\ldots\ldots$

(1) 根據此規律可知，$\frac{7}{50}$ 是此串分數中的第50群的第7數，而前49群共有

$1+2+3+\ldots+49 = \frac{49(1+49)}{2} = 1225$個數。

由此可知，$\frac{7}{50}$是這串數的第$1225+7=1232$個分數。

(2) 因為$1+2+3+...+15=120$，即前15群共有120個分數，那麼第125個分數就應該是第16群的第5個分數，即$\frac{5}{16}$。



同學們要緊記，面對數列問題，切忌心浮氣燥，冷靜地找出數列的形式，就可以克服這類問題了。

數列問題常見於數學比賽，筆者就以下例作結，讓同學見識一下它們在競賽中的形式。

例六：把1至200的自然數分成A，B，C三組：

A組：	1,	6,	7,	12,	13,	18,	…
B組：	2,	5,	8,	11,	14,	17,	…
C組：	3,	4,	9,	10,	15,	16,	…

(a) 求A組第24個數的數值。

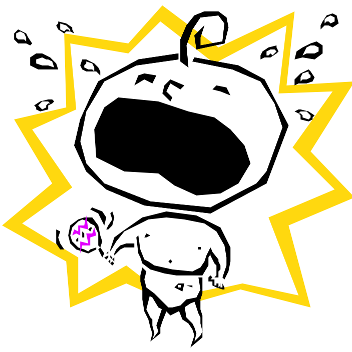
(b) B組內共有多少個數字。

(c) 求B組內所有數的總和。

(d) C組的第幾項是178。

（小六數學比賽94-95年度甲部第8題。）

解答：(a) 驟眼看去，會以為數列的規律就是上下「U」字形的移動，同學若這樣想的話，恐怕做不了一會就給弄個團團轉！還是在每一組向橫看看吧！規律說實很簡單，每一組的單數項和雙數項都是公差為6的等差數列。所以A組的第24個數，其實就是數列6, 12, 18, . .的第12項。即$6\times12=72$。



(b) 要找出B組數字的個數，先要知道B組最後一個數是多少。這次我們要直看數列。每隔6個數，數字會走完一個「U」字形的路徑，重新回到A組。因為200被6除得33餘2，所以走完第33次「U」字形後，數字「198」會停留在A組，即

A組：	⋯	187,	192,	193,	198,	199
B組：	⋯	188,	191,	194,	197,	200
C組：	⋯	189,	190,	195,	196,	

B組最後一個數就是200。而B組數字的個數就是 $\frac{200-2}{6}\times 2+1=67$。

(b) B組內所有數的和

$$= \left(\underbrace{2+8+14+\ldots+194}_{33項}\right)+\left(\underbrace{5+11+17+\ldots+197}_{33項}\right)+200$$

$$= \frac{33\times(2+194)}{2}+\frac{33\times(5+197)}{2}+200$$

$= 6767$

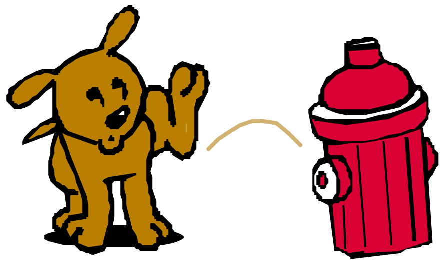
(c) C組的雙數項數列是4, 10, 16, …。「178」是數列的第 $\frac{178-4}{6}+1=30$ 項，所以「178」在C組的第60項。

習題

1. 把自然數（Natural Number）排成螺旋形：
在「2」處拐第一個彎,
在「3」處拐第二個彎,
在「5」處拐第三個彎（如下圖）. . .
問拐第二十個彎的地方是那一個數？

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
21 & \rightarrow & 22 & \rightarrow & \cdots & \cdots & & & & & & & \\
\uparrow & & & & & & & & & & & & \\
20 & & 7 & \rightarrow & 8 & \rightarrow & 9 & \rightarrow & 10 \\
\uparrow & & \uparrow & & & & & & \downarrow \\
19 & & 6 & & 1 & \rightarrow & 2 & & 11
\end{array}$$

↑		↑				↓		↓
18		5	←	4	←	3		12
↑								↓
17	←	16	←	15	←	14	←	13



2. **試觀察下列數列的規律：**

第1個數

100,99,98,97,99,98,97,96,98,97,96,95,...

第2個數

問第194個數是多少？

3. **把自然數中的奇數1, 3, 5, 7……依次填寫成五列（如下圖），把最左邊的一列叫做第1列，從左到右依次編號。**

第1列	第2列	第3列	第4列	第5列
	1	3	5	7
15	13	11	9	
	17	19	21	23
31	29	27	25	
…	…	…	…	…

問1989這個數出現在哪一列中？

4. **觀察以下自然數組成的數陣：**

			1				第 1 行
		2	3	4			第 2 行
	5	6	7	8	9		第 3 行
10	11	12	13	14	15	16	第 4 行
……	……	……	……	……	……	……	………

問 203 應是第幾行第幾個數？

5. **將自然數按如下順序排成一數陣：**

1	2	6	7	15	…
3	5	8	14	…	
4	9	13	…		
10	12	…			

11　…
…

在這樣排列下，數字3排在第二行第一列，13排在第三行第三列。問1993排在第幾行第幾列？

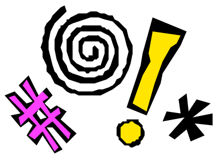
6.　把自然數排列如圖所示的表格,

	第1列	第2列	第3列	第4列	第5列	…
第1行	1	2	5	10	17	…
第2行	4	3	6	11	18	…
第3行	9	8	7	12	19	…
第4行	16	15	14	13	20	…
第5行	25	24	23	22	21	…
…	…	…	…	…	…	…

(a)　問第15行的第15個數是多少？
(b)　第1行的第101個數是多少？

7.　有如下的奇數排列

1；　——　第1行
3，5；　——　第2行
7，9，11；　——　第3行
13，15，17，19；　——　第4行
……………………　………



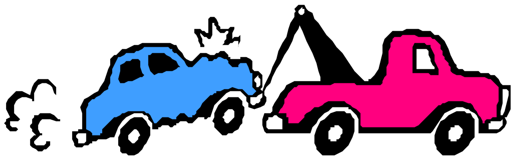
(a)　求從第1行到第10行共有幾個數？
(b)　第10行首尾的兩個數各是甚麼？
(c)　第10行各數的和是多少？

8.　現有一串分數：

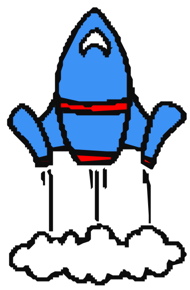
$$\frac{1}{1};\frac{1}{2};\frac{2}{1};\frac{1}{3};\frac{2}{2};\frac{3}{1};\frac{1}{4};\frac{2}{3};\frac{3}{2};\frac{4}{1};\ldots\ldots$$

(a)　$\frac{7}{30}$是這串分數中的第幾個分數？
(b)　這串分數中的第1994個分數是多少？

9.　設有數列：1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, ...
(a)　第一個「20」在數列的第幾項？
(b)　第100項是多少？
(c)　首100項的和是多少？



10. **觀察數列：**1, 2, 3, 2, 1; 2, 3, 4, 3, 2; 3, 4, 5, 4, 3; 4, 5, 6, 5, 4; ...



(a) **第一個「10」是在數列的第幾項？**

(b) **在第一個「10」出現時，共出現了多少個「3」的倍數？**

(c) **數列的第100個數字是多少？**

(d) **數列的首100個數字的總和是多少？**

（小六數學比賽96-97年度甲部第12題。）

11. **觀察下列數列：**

第1項	第2項	第3項	第4項	第5項	第6項	第7項	第8項	第9項	第10項	…
$\frac{1}{1}$;	$\frac{1}{2}$,	$\frac{2}{2}$;	$\frac{1}{3}$,	$\frac{2}{3}$,	$\frac{3}{3}$;	$\frac{1}{4}$,	$\frac{2}{4}$,	$\frac{3}{4}$,	$\frac{4}{4}$;	…

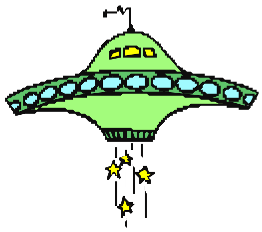
(a) **求第25項的數值。**

(b) **最先的第幾項是** $\frac{7}{15}$ **？**

(c) **最先的100項中，有多少項經約簡的數值等於1？**

(d) **求最先30項的總和。（答案用最簡分數表示）**

（小六數學比賽94-95年度甲部第6題。）



12. **觀察下列數列。**

2, 3, 5, 2, 3, 3, 5, 2, 3, 3, 3, 5, ...

在第三十個3出現的時候，

(a) **求5出現了多少次。**

(b) **求所有出現了的2總和。**

(c) **求有多少個數字出現了。**

(d) **求所有出現了的數字的總和。**

（小六數學比賽93-94年度甲部第13題。）

13. **一串數：** 1, 9, 9, 1, 4, 1, 4, 1, 9, 9, 1, 4, 1, 4, 1, 9, 9, 1, 4, 1, 4, …**共有1998個數。**

(a) **求1出現了多少次？**

(b) **求9出現了多少次？**

(c) **求4出現了多少次？**

(d) **所有數的和是多少？**

（小六數學比賽93-94年度乙部第13題。）

解答

1. **解答：在沒有轉彎轉到頭暈前，我們把轉彎的規律列出，看看可否找到一些線索，即：**

轉彎次數	彎角上的數字	差
1	2	
		1
2	3	
		2
3	5	
		2
4	7	
		3
5	10	
		3
6	13	

我們發現，除了第1個彎和第2個彎的差是單一外，其餘的都是一對對出現。而且差總是等於「雙數」彎的一半。所以第19個彎和第20個彎的差就等於$20 \div 2 = 10$。**再者，要計算第幾個彎的數值，只要將之前所有的差加起來，再加上第一個彎的數值(2)即可**

第1個彎

例如第 6個彎 $= 2 + [(1 + (2+2+3+3)]$ **（括號內是第6個彎前的差）**

$= 13$

所以第20個彎 $= 2 + [1 + (2 + 2 + 3 + 3 + ... + 9 + 9 + 10 + 10)]$

$= 111$

2. **驟眼看去，數字的重覆會令同學感到眩目，不知從何入手。但細心去看，不難發現數字是４個一組，第一組是｛100，99，98，97｝，然後將100減1，第二組就由99開始，即｛99，98，97，96｝；如此類推。現在我們祇須知道第194個數是在第幾組即可 。**

因為$194 \div 4 = 48 ...... 2$ **（餘數）**

所以第194個數就是第四十九組的第2個數。

即第194個數 $= 100 - 48 - 1 = 51$

3. 首先，我們要知道1989是第幾個單數：

$\because \quad \dfrac{1989+1}{2}=995$

$\therefore$ 1989是第995個單數。

另外，我們發現數字的排列形式每8個數字一個循環。

又 $995 \div 8 = 124......3$

所以第992（124×8）個數，即1983將會排在第一列，只要再往後「數」3數，就可以知道1989在第幾列了。

第一列	第二列	第三列	第四列	第五列
	…	…	…	…
1983	1981	1979	1977	
	1985	1987	**1989**	1991
…	…	…	…	

$\therefore$ 1989應排在第四列。

4. 由例四可知，數字的規律在每一行的最後一個數裡——它是該行行數的平方！由此，我們可以先確定203所在的行數。

$\because \quad 14^2 = 196 < 203 < 225 = 15^2$

$\therefore$ 203應在數列的第15行。

$\because$ 第15行的第1個數 $= 196 + 1 = 197$，又 $203 - 197 + 1 = 7$。

$\therefore$ 203應該是這行的第7個數。

$\therefore$ 203在數列的第15行第7個數。

5. 不必驟眼看去，簡直是看來看去也找不到箇中的規律！該如何是好呢？何不翻一翻例題，看看可不從中得到啟示。

1	2	6	7	15	…
3	5	8	14	…	
4	9	13	…		
10	12	…			
11	…				
…					

旋轉→

1

3　2

4　5　6

10　9　8　7

11　12　13　14　15

………………………………

$\because \quad 1 + 2 + 3 + \ldots + 62 = 1953 < 1993$,

又 $1 + 2 + 3 + \ldots + 63 = 2016 > 1993$,

$\therefore$ 1993這數應該屬於旋轉後的數陣的第63行；也就是原數陣的第63列了。

現在只須知道由2016需要倒退多了步會到達1993，就可以知道1993所在的行數了。

$\because \quad 2016 - 1993 = 23$

$\therefore$ 1993應在第 $63 - 23 = 40$ 行。

6. (a) 規律就在第1列中：1，4，9，16，25，⋯

可有留意，每一個數都是該行行數的平方！

∴ 第15行的第1個數 = 15^2

= 225

由於每一行的數字，都會隨著列數的增加而減少，所以

第15行第15個數 = 225 – 15 + 1

= 211

(b) 驟眼看去，第1行的數字無甚規律：

項數	1	2	3	4	5	6	⋯	101
	1	2	5	10	17	26	⋯	?
差		1	3	5	7	9	⋯	?

比較明顯的規律就是相鄰兩項的差是個單數。不過，用這規律去推算後面的項很不方便。我們得尋找另一個規律（秘密仍是在第1列裡）：

項數		數式	規律
1	1	= 1	
2	2	= 1 + 1	$= 1+(2-1)^2$
3	5	= 1 + 4	$= 1+(3-1)^2$
4	10	= 1 + 9	$= 1+(4-1)^2$
5	17	= 1 + 16	$= 1+(5-1)^2$
6	26	= 1 + 25	$= 1+(6-1)^2$

明顯地，第101項 = $1+(101-1)^2$

= **10001**

7. (a) 明顯可見，第1行有1個數，第2行有2個數，如此類推，到第10行就有10個數了。所以，從第1行到第10行共有1 + 2 + …+ 10 = 55個。

(b) 由例四可知，數字的規律在於每一行最後一個數字：

行數	最尾數字	規律
1	1	= 2(1) – 1
2	5	= 2(1 + 2) – 1
3	11	= 2(1 + 2 + 3) – 1
4	19	= 2 (1 + 2 + 3 + 4) – 1

由本表可知，每一行最尾數字，就是2(行數和) – 1。

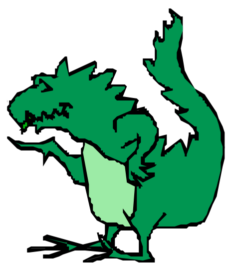
∴ 第9行的最後一個數 = 2(1 + 2 + 3 + …+ 9) – 1

= 2(45) – 1

= 89

∴ 第10行的第一個數 = 89 + 2

= 91



第10行最後一個數 $= 91 + 2(10-1)$

$= 109$

(c) 第10行各數的和 $= \frac{10}{2}(91+109)$

$= 1000$

8. 驟眼看去，這數列的規律比例五要複雜：分子的數字呈上升排列，分母的數字呈下降排列，真不知在第幾群分數上會出現 $\frac{7}{30}$。但細心去看

第 4 群數

$$\frac{1}{1};\frac{1}{2};\frac{2}{1};\frac{1}{3};\frac{2}{2};\frac{3}{1};\underbrace{\frac{1}{4};\frac{2}{3};\frac{3}{2};\frac{4}{1}};\ldots\ldots$$

原來數列上每一群數分子和分母的和是不變的。

(a) $\frac{7}{30}$ 應該是第37群數的第7個數。連同前36群數，

$\frac{7}{30}$ 在數列的項數 $= 1 + 2 + 3 + \ldots + 36 + 7$

$= 673$

(b) 由(a)部份可知，要知道第1994項的分數，必須先知道它落在那一群數裡。

Θ $1 + 2 + 3 + \ldots + 62 = 1953 < 1994$

$1 + 2 + 3 + \ldots + 63 = 2016 > 1994$

∴ 第1994個分數應落在第63群數裡。

而 $1994 - 1954 + 1 = 41$，所以，第1994項的分數應是 $\frac{41}{22}$。

9. (a) 第一個「20」應出現於數列的項數 $= 1 + 2 + 3 + \ldots + 20$

$= 210$

(b) 要知道第100項的數字，只須知道由1開始，依次相加到第幾個字會超過100。

Θ $1 + 2 + 3 + \ldots + 13 = 91 < 100$

$1 + 2 + 3 + \ldots + 14 = 105 > 100$

∴ 第100個數就是14。

(c) 首100個數的和 $= 1\times1+2\times2+3\times3+\ldots+13\times13+14\times9$

$= 945$

10. (a) 這道題目的規律在那裡呢？其實這題目的規律就在分母，「1」出現1次，「2」出現2次，「3」出現3次，…如此類推，分母的數字每增1，出現的次數也跟著增加1次。因此，我們只須數一數在第25項分母增加到那個數字即可。因為 $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$，所以第21項就是「$\frac{6}{6}$」，順次序去數，第22至

25項自然是「$\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$」。所以第25項是「$\frac{4}{7}$」。

(b) 先數一下，第一個出現分母是15的分數在第幾項。

$$\Theta \quad 1+2+3+\ldots+14 = \frac{14\times(1+14)}{2}$$
$$= 105$$

$\therefore$ 第106項就是「$\frac{1}{15}$」了，再順序數下去，就知道「$\frac{7}{15}$」是第112項。

(c) $$\Theta \quad 1+2+3+\ldots+13 = \frac{13\times(1+14)}{2}$$
$$= 91 < 100$$

$\therefore$ 最後一個能簡約為1的分數，就是第91項「$\frac{13}{13}$」，而下一個「$\frac{14}{14}$」應在第105項，故共有13個這樣的數。

(d) 由上述方法可知，第28項就是「$\frac{7}{7}$」，第29、30項分別是「$\frac{1}{8}$」、「$\frac{2}{8}$」，

$$\text{所以首30項的和} = \frac{1}{1}+\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{3}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{7}+\frac{2}{7}+\ldots+\frac{7}{7}\right)+\frac{1}{8}+\frac{2}{8}$$
$$= 1+\frac{3}{2}+\frac{6}{3}+\frac{10}{4}+\frac{15}{5}+\frac{21}{6}+\frac{28}{7}+\frac{3}{8}$$
$$= 17\frac{7}{8}$$

11. 細心觀察上述數列，不難發現它的規律，仍不明白？其實數列中的「；」號已經透露了這個特質，它是5個一組的：

第一組	第二組	第三組	第四組	
1, 2, 3, 2, 1;	2, 3, 4, 3, 2;	3, 4, 5, 4, 3;	4, 5, 6, 5, 4;	……

(a) 由上述的特質可以知道，第一個「10」會出現在第八組的中間數，即「8, 9, 10, 9, 8」。因為首七組有35個數，所以，第一個「10」應在數列的第38項。

(b) 在第一個「10」出現時，「3」只在第一、二、三組出現，所以共出現了5次。

(c) 數列的第100個數字剛好是第二十組的最後一個數，而第二十組應是「20, 21, 22, 21, 20」，所以第100個數字是「20」。

(d) 將每組數加起，得一個新的數列：9, 14, 19, 24, …。這是一個公差為5的等差數列，它的第二十項 = 20 + 21 + 22 + 21 + 20 = 104。所以

$$\text{首100項的和} = \frac{20\times(9+104)}{2}$$
$$= 1130$$

12. **這串數列的規律是甚麼呢？我們可以把數列分為「2, <u>3</u>, 5」、「2, <u>3, 3</u>, 5」「2, <u>3, 3, 3</u>, 5」…等組別，每增加一組，「3」就會增加一個，因為**$1 + 2 + 3 + \ldots + 7 = 28$，**所以第三十個「3」出現時，會出現在第八組。**
   (a) **這時，「5」出現了7次。「2」出現了8次，**
   (b) **由(a)可知，所有「2」總和** $= 8 \times 2 = 16$。
   (c) **由(a)，(b)可知「5」出現了7次，「2」出現了8次，所以共有**$7 + 8 + 30 = 45$**個數字出現。**
   (d) **所有出現數字的和** $= 2\times8+5\times7+3\times30$
   $= 141$

13. **這個數列的規律是甚麼？經過幾題題目的練習，相信同學一眼就能看出它是7個一組，然後不斷重複，即**

<u>1, 9, 9, 1, 4, 1, 4</u>, <u>1, 9, 9, 1, 4, 1, 4</u>, <u>1, 9, 9, 1, 4, 1, 4</u>, …

現在只差最後的幾個數字而矣。因為$1998 \div 7 = 285 \ldots 3$，**所以數列在第285組後還有三個數字，即**

第285組	**第286組**
1, 9, 9, 1, 4, 1, 4	1, 9, 9,

每一組「1」出現了3次，「9」出現了2次，「4」出現了2次，所以在1998個數中
(a) 「1」**出現了** $3\times285+1=856$ **次。**
(b) 「9」**出現了** $2\times285+2=572$ **次。**
(c) 「4」**出現了** $2\times285=570$ **次。**
(d) **所有數的和** $= 1\times856+9\times572+4\times570$
$= 8284$

顧問老師：梁志明、黃萬安、黃偉智、楊振雄、袁仲強
仁愛堂田家炳中學數學組