解難之趣

屯門區小學數學比賽專題特刊

第八屆　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　一九九七年四月二十五日

數尾數問題

有沒有想過 2^{1001} 展開後的個位值是多少？就算手頭上有計算機，這問題仍是無法解決的。「數尾數」問題是數學競賽中常見的問題，解決它的方法，在於捕捉它的「規律」。我們不妨先看看一些相關，而又較簡單的題目，掌握「捕捉」規律的技巧。

例一：試求 3^{1997} 的尾數。

解答：先考慮簡單情況：

3^1　(= 3)　的尾數（個位數）是 3

3^2　(= 9)　的尾數（個位數）是 9

3^3　(= 27)　的尾數（個位數）是 7

3^4　(= 81)　的尾數（個位數）是 1

3^5　(= 243)　的尾數（個位數）是 3

3^6　(= 729)　的尾數（個位數）是 9

3^7　(= 2187)　的尾數（個位數）是 7

……………

觀察上列各行，可以發現 3^5 的尾數與 3^1 的尾數相同，3^6 的尾數與 3^2 的尾數相同；此外，我們會發現，當次方順序增加，尾數亦不斷依照 3，9，7，1 的規律循環。

其規律為：

若次方為 4 所除時，

餘數為 1，則尾數與 3^1 相同；即 3。

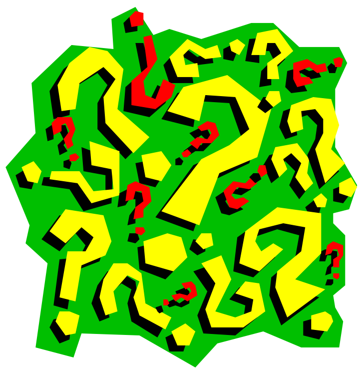
餘數為 2，則尾數與 3^2 相同；即 9。

餘數為 3，則尾數與 3^3 相同；即 7。

餘數為 0，則尾數與 3^4 相同；即 1。

因為　$1997 = 4 \times 499 + 1$，

故此 3^{1997} 的尾數與 3^1 的尾數相同，即 3。



例二：求 $3^{1995}+2^{1995}+1^{1995}$ 的個位數值。

解答：首先，把原來的題目分成三部份：

①求 3^{1995} 的尾數；②求 2^{1995} 的尾數；③求 1^{1995} 的尾數；然後，把三個部份的答案一併考慮，再解答原來的問題。

根據例一的提示，當 3 的次方增加，尾數依照 3，9，7，1 的規律循環；此外，$1995=4\times498+3$，故 3^{1995} 的尾數是 7。

同樣，當 2 的次方增加，尾數依照 2，4，8，6 的規律循環，由此得知 2^{1995} 的尾數是 8。另外，1 的任何次方都是 1。

合併三個部份，則所求的個位數就是 6(7 + 8 + 1 = 16)了。

例三：求 $2^{1001}\times4^{1002}\times6^{1003}\times8^{1004}$ 的個位數值。

解答：利用例二的經驗，先把問題分成四個小部份：

①當 2 的次方增加，尾數會循 2，4，8，6 的次序循環，　2^{1001} 的尾數是 2；

②當 4 的次方增加，尾數會循 4，6 的次序循環，　4^{1002} 的尾數是 6；

③當 6 的次方增加，尾數一定是 6，　6^{1003} 的尾數是 6；

④當 8 的次方增加，尾數會循 8，4，2，6 的次序循環，　8^{1004} 的尾數是 6；

最後，從四個尾數來考慮，它們的乘積的尾數與原來的四個數字的乘積相同，即個位數是 2。

數星期問題

看過「數尾數」的規律後，讓我們再學習掌握別一種與規律有關的競賽題目——數星期——遇到有人問：「從明天開始數的第一百天是星期幾？」，應該怎樣算呢？其實一個星期有七天，這問題祇是問 100 被 7 除後，餘數是多少。

例四：今天是星期二，從明天開始數的第一百天是星期幾？

解答：100 被 7 除，餘 2，所以第一百天是星期二的後 2 天，即星期四。

例五：一九九六年十月五日是星期六，問一九九七年十二月二十四日是星期幾？

解答：第一步，先計算由一九九六年十月五日的翌日起，至一九九七年十二月二十四日止，究竟有多少天呢？

一九九六年十月六日至一九九七年十月五日為一年，即 365 日（因一九九七年不是閏年，二月沒有 29 日）。一九九七年十月六日至一九九七年十二月二十四日共有 31 + 30 + 19 = 80 日，全部共有 365 + 80 = 445 日。

第二步，計算 445 日後是星期幾。

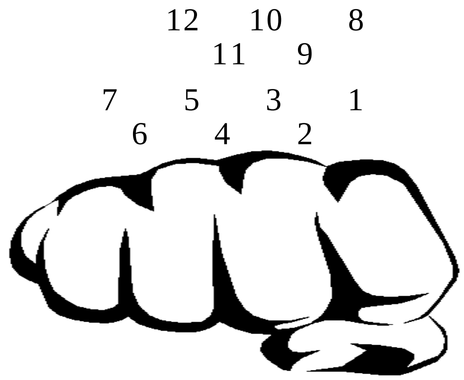
445 被 7 除，餘 4，一九九七年十二月二十四日是星期六再過 4 天；

由於 6 + 4 = 10 大於 7，再將 10 被 7 除，又餘 3，

即一九九七年十二月二十四日是星期三。

手握時光

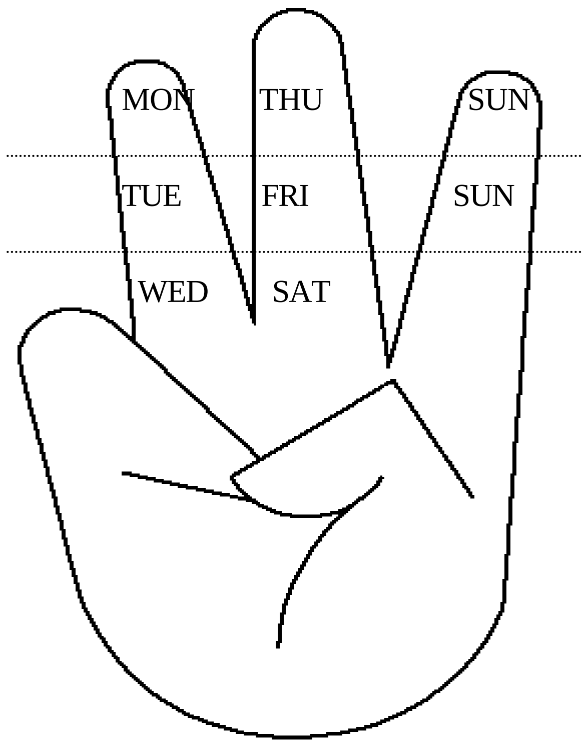
假若問你怎樣用手數算時光，你會想到下圖的情況：



握起拳頭數著「一月大、二月小、……」，手指骨凸起的地方就是「月大」，凹陷的地方是「月小」。就是這麼多嗎？這裡就有一個小玩意兒。

例六：想約同學於一九九七年七月的第二個星期六去踏單車，已知一九九六年的一月一日是星期一，不用月曆卡，怎樣能最快速算出那天是什麼日子呢？

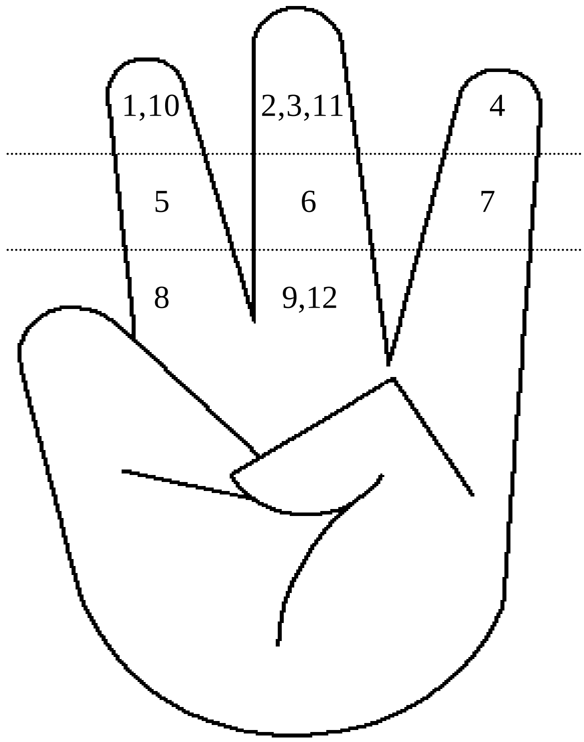
解答：大家先看一看下圖：



圖一

先按著上圖所示，定了三隻手指的其中八個指節為一星期的不同日子。

接著再牢記下列的不同位置：

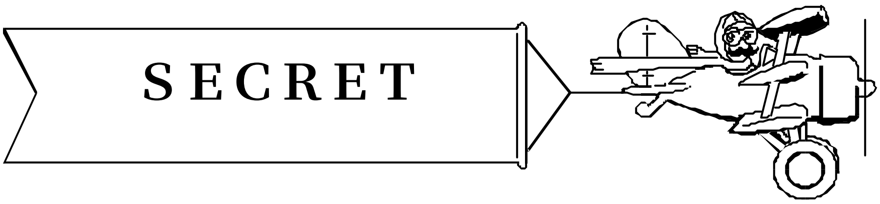


圖二

觀察上圖，可知在非閏年時，假若一月一日是星期一，那麼：
二月一日是星期四，三月一日是星期四，四月一日是星期日，
五月一日是星期二，六月一日是星期五，七月一日是星期日，
八月一日是星期三，九月一日是星期六，十月一日是星期一，
十一月一日是星期四，十二月一日是星期六。
按著這些資料，先數月份，再「數」日數，再調較年份，便能知道指定的日子是星期幾。

回想這道題目，一九九六年一月一日是星期一，那麼照圖二的位置，七月一日理應是星期日，可是一九九六年是閏年，當過了二月二十九日便得加上一天，即是在一九九六年七月一日當天，其實是星期一。
再者，每過一個非閏年，便過了 365 天，也即是說，翌年的同一天便會遞移了一天，因此，一九九七年的七月一日便應是星期一的翌日，即星期二。（因一九九七年非閏年，並沒有二月二十九日。）
既然一九九七年七月一日是星期二，順序數下，七月五日便是星期六；第二個星期六便是一九九七年七月十二日。
若然不信，不妨取出日曆卡核對一下。

可能你會覺得這個方法非常奇妙，其實它祇不過把一星期的不同日子稍作安排，並考慮到「數」數的方便，因此雖然一星期祇有七天，但卻安排了八個指節來表示，使代表每個月首天日子的位置，看起來更有規律。



利用上述的方法，還得留心三個要點。

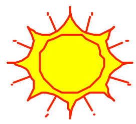
第一，對每個月首天的位置絕不能弄錯，否則當然不能得到正確的答案。

第二，數日子的次序是要先數月（暫不要理會當年的一月一日是星期幾），再數日。當數日時，別再把兩個代表星期日的指節分開；它們是代表同一日的！否則一星期便會變成有八天的了。

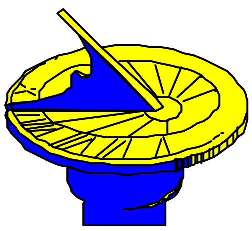
第三，到最後數年份時，留心那一年是否閏年？若是閏年，則慮過了二月二十九日沒有？適當地調較日子便能把沒有定年的日子，重新切合到要計算的年份中了。

若然你知道要數算年頭的元旦是星期幾，那就好辦。但若忘了，那豈不是「得物無所用」？況且要記下每年的一月一日也的確是煩厭，有沒有解決辦法呢？

其實你亦不必勞心去背誦每一年的元旦是星期幾。簡單地說，在二十世紀九十年代，祇有一九九零年及一九九六年的一月一日是星期一，其他的年份便可利用這兩年來推算得知。



公曆的閏年



提到閏年，究竟那一年是閏年呢？

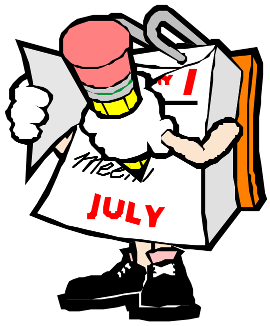
不是四年一閏嗎？的確不是！

現今世界上各國通用的公曆，是根據羅馬人的「儒略曆」改編而成的。天文學上把地球繞太陽從春分點回到春分點的時間，稱為一個回歸年，其長度是 365.2422 平太陽日。但是儒略曆卻以 $365\frac{1}{4}$ 日為一回歸年，規定平年為 365 日，每四年有一個閏年為 366 日。這就是我們習以為常的曆法。

但是這樣每年差不多要長十一分十四秒，於是誤差產生了。從公元前四十六年起，積累到十六世紀，相差竟達十天之多，結果三月廿一日的春分提早到三月十一日。於是人們特規定一五八二年十月五日為十月十五日。並且，為了避免以後積累誤差起見，特設了閏年，計算辦法也予以下規定：

以公曆紀年為標準，能被四整除的年份是閏年；但逢百的年份，如非四百的倍數則不是閏年；也就是說，必須是四百的倍數才是閏年。例如一九零零年不是閏年，一九九六年是閏年，二零零零年又將是閏年，得在二月份增加一天，全年共 366 天。

閏年星期的計算法



除了以上所寫的方法外，要想知道隨便那一天是星期幾，不用翻日曆，根據曆法原理，祇要按照下面的公式，做一些簡單的計算就可以了。

$$S = x - 1 + \left[\frac{x-1}{4}\right] - \left[\frac{x-1}{100}\right] + \left[\frac{x-1}{400}\right] + C$$

這裡 x 是公元的年數，C 是從這一年的元旦算到這天為止（連這一天也在內）的日數。在計算 S 時，三個分數式祇要商數的整數部份，把餘數略去，與其他幾項依次加減，就可得到 S。

求出 S 以後，用 7 除；如果恰能除盡，這一天一定是星期日，若餘數是 1，那麼這一天就是星期一，餘數是 2，這一天是星期二，如此類推。讓我們看看以下例題：

例七：一九九七年十月一日的國慶是星期幾呢？

解答：為方便計算，先求 C 值。從九七年元旦到十月一日的日數

$= 31 + 28 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 1$

$= 274$ 日

按上列公式，可得：

$$S = 1997 - 1 + \left(\frac{1997-1}{4}\right) - \left(\frac{1997-1}{100}\right) + \left(\frac{1997-1}{400}\right) + 274$$

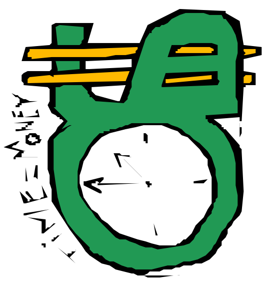
$= 1997 - 1 + 499 - 19 + 4 + 274$

$= 2754$

$= 393 \times 7 + 3$

由此而知，一九九七年十月一日應是星期三。

其實這道式子，正正用了先前說的那個糾正日子的方法，不過確實是麻煩了一點。



習題

1. (a) $7^{1995}+5^{1995}-3^{1995}$ 的個位數是多少？
   (b) $5^{1997}+3^{1996}-2^{1995}$ 的個位數是多少？

2. 1993^{1994} 的個位數字是多少？

3. 1997 年 7 月 1 日回歸日，是星期幾？

4. 回歸後的第一個國慶日，即 1997 年 10 月 1 日，又是星期幾？

5. 颱風愛倫於 1983 年 9 月 9 日正面吹襲香港，天文台掛了十號風球，當天是星期幾？

解答

1. (a) 先求 7^{1995} 的尾數，當次方增加，尾數依次為 7，9，3，1，從第 5 次開始，
   尾數有規律地循環。又 $1995\div 4=498+3$，則 7^{1995} 的尾數為 3。
   由於 5 的任意次方的尾數均為 5，故 5^{1995} 的尾數為 5。
   至於 3^{1995} 的尾數，當次方增加，尾數依次為 3，9，7，1，從第 5 次開始，
   尾數有規律地循環，故 3^{1995} 的尾數為 7。
   合拼三部份，則所求的個位數就是 $3+5-7=1$ 了。

   (b) 由(a)可知 5^{1997} 的尾數是 5，3^{1996} 的尾數是 1；
   至於 2^{1995} 的尾數，當次方增加，尾數依次為 2，4，8，6，從第 5 次開始，
   尾數有規律地循環，故 2^{1995} 的尾數是 8。
   不過，同學千萬別以為所求的個位數就是 2！錯！
   因為 $5+1-8=-2<0$，我們需從十位借 1 成 10，再行相減，即
   $10+5+1-8=8$，
   則所求的個位數應是 8。
   註：由於 $5^{1997}+3^{1996}>2^{1995}$，故我們從十位借 1 相減，
   不會出現負數，導致大亂！真是抹一把汗！

2. 同學是否因為要尋找 1993 在次方增加下的規律，而苦於計算 1993 自乘的乘積呢？其實，我們又何須理會 1993×1993 等於多少，只須知道尾數為 3 的數自乘，尾數必為 9，尾數為 9 的數，再乘 1993（尾數為 3），則尾數必為 7，如此類推，我們就得以下規律：

   1993^1 的尾數是 3；
   1993^2 的尾數是 9；
   1993^3 的尾數是 7；
   1993^4 的尾數是 1；

   從第 5 次開始，尾數有規律地循環——其實 1993 依次方增加的尾數的規律，根本就是 3 依次增加的尾數的規律！
   因為 $1994 \div 4 = 498 + 2$，故此 1993^{1994} 的尾數就是 9 了。

3. 星期二，例題中也提到這天。

4. 星期三，是這年開始新增的假期。

5. 首先，由一九九零一月一日倒推至一九八三年一月一日，共 2557 日，
   由 $2557 \div 7 = 365 + 2$ 可知，八三年的元旦日是星期六。
   由「手握時光」的要訣可知，若果元旦日是星期一，則九月一日是星期六，九月九日就是星期日了。但現在元旦日是星期六，故我們得把日子從星期日倒數二日，即星期五。

   有趣資料：原來颱風愛倫是八十年代(1990 年以前)最後一個懸掛十號風球的颱風，使香港多添了一天半的假期。踏入二十世紀，香港名副其實成了福地！

顧問老師：梁志明、黃萬安、黃偉智、楊振雄、袁仲強
仁愛堂田家炳中學數學組